EL ARTE DE RAZONAR

PUCE
IBARRA

Centro de Publicaciones
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL ECUADOR

CRÉDITOS

Pontificia Universidad Católica del Ecuador - Sede Ibarra Ibarra: Av. Jorge Guzmán Rueda y Av. Aurelio Espinosa Pólit. Cdla. "La Victoria" Teléfono: 06 2615 500 / 06 2615 631 Fax: (593)6-2615 446 Apartado Postal 10.01.12 Web Site: www.pucesi.edu.ec Email: prorect@pucesi.edu.ec

SELLO EDITORIAL
Centro de Publicaciones PUCE Web Site: www.edipuce.edu.ec Quito, Av. 12 de octubre y Robles Apartado N° 17-01-2184 Telf. (5932) 2991 700 E-mail: publicaciones@puce.edu.ec Primera edición

Título: El arte de razonar

Autores:
Luis David Narváez,
Pablo Fernández,
Stalin Arciniegas y
Oswaldo Portilla

Revisión de estilo y redacción: Gabriela Garcés
Concepto gráfico y diagramación: Oswaldo Portilla

ISBN: 978-9978-375-62-4

REVISIÓN DE PARES

El presente libro fue sometido al debido arbitraje y dictamen de pares evaluadores expertos en el área del conocimiento.

AGRADECIMIENTO

El arte de enseñar es el más noble trabajo, un merecido agradecimiento a nuestro compañero y maestro Pablito, por permitirnos trabajar en el desarrollo de este libro.

A la PUCE Sede Ibarra y sus autoridades por la confianza depositada en nosotros.

A todas aquellas personas que están a nuestro lado, motivándonos y creyendo en todo lo que emprendemos.

PRÓLOGO

Una de las expresiones cotidianas más ciertas que puede existir es que las matemáticas son el lenguaje universal. Todos podemos hablar ese "idioma" de forma similar y podemos entender lo que dicen matemáticamente personas en otros lugares independientemente de su nacionalidad, lenguaje, sexo, religión o cualquier otro contexto social o político.

Poder entender las matemáticas es una actividad que debemos buscar en todos los niveles de nuestra vida, por lo cual podemos decir que está alineado a lo que se entiende actualmente como aprendizaje a lo largo de la vida. Las instituciones de educación superior tenemos una responsabilidad inmensa en divulgar este conocimiento y permitir que la mayor cantidad de personas puedan dominarlo, ya que ello les permitirá desde el manejo de operaciones básicas, hasta el uso de términos estadísticos, y por supuesto el manejo de la lógica que es fundamental en todo contexto.

Los tiempos que vivimos actualmente generan grandes desafíos a los educadores, ya que hay una gran variedad de medios por los cuales los estudiantes pueden conseguir información y buscar los mejores métodos y mecanismos para aprender. Por ello, cada día es más complicado presentar nuevas propuestas que permitan de forma agradable, entretenida y con suficiente contenido, brindar conocimiento a los lectores.

En esta propuesta editorial, los autores han hecho un esfuerzo importante desde el punto de vista de contenido, organización, diseño gráfico, desarrollos históricos relevantes y una rigurosidad apropiada que permiten ver a las matemáticas sin el acostumbrado miedo que muchas veces sienten las personas sobre esta disciplina y sintiendo que es algo cercano, divertido y útil.

La utilización de ejercicios propuestos genera interés en los lectores en la revisión detallada de los contenidos para poder responderlos. Además de ser presentados de forma divertida y con casos diferentes a los conseguidos de forma tradicional en otros libros.

La cuidadosa selección de las imágenes que forman parte del apoyo a los desarrollos de los contenidos, son otro elemento diferenciador de esta obra y que la hace especial.

La forma de enlazar los temas va de lo más sencillo a lo más complejo, comenzando con una introducción a la ciencia y las matemáticas donde se presenta desde los aspectos históricos, hasta la motivación para su estudio. Posteriormente, se organiza en cuatros partes que incluye: razonamiento lógico, razonamiento abstracto, aritmética, álgebra, y estadística.

Este libro podrá ser utilizado y disfrutado por personas tanto a niveles de educación básica, media y superior, hasta por todos aquellos interesados en entrar en fascinante mundo de las matemáticas.

Enhorabuena a los autores y el mayor de los éxitos a todos aquellos que compartiremos nuestras historias y aventuras en idioma "matemático".

Dr. Francklin Rivas Echeverría

INTRODUCCIÓN

La matemática es una ciencia que surge desde hace 3000 años antes de Cristo, en la antigua Egipto y Babilonia, luego se expandió por todo el mundo, es así que la matemática se considera el lenguaje universal, el cual todos podemos entender. Asimismo, es una herramienta mental que permite al ser humano realizar complejas operaciones en la vida real como son: las proporciones, análisis de espacios, relacionar formas, cantidades, incertidumbres entre otras. La finalidad de este libro es que sea una herramienta para desarrollar la lógica, el razonamiento, el pensamiento critico y la abstracción. Concretamente, este libro tiene todos los contenidos básicos necesarios para que el estudiante logre desenvolverse en la vida y sirva de ayuda para cualquier área de especialización. La estructura es dividida en cinco partes, la primera es el razonamiento lógico, seguido del razonamiento abstracto, la aritmética, algebra y estadística. Además, este libro cuenta con ejercicios cuidadosamente seleccionados y analizados para que cumplan con el propósito expuesto.

EL ARTE DE RAZONAR

Está comprobado que el llamado ejercicio mental es esencial para que la agilidad y la capacidad de razonar no disminuyan con la edad. Razonar es pensar ordenando las ideas y los conceptos hasta llegar a una conclusión, la capacidad de razonamiento puede mejorar a través de entrenamientos o ejercicios, como si de cualquier otro músculo se tratase.

Los ejercicios propuestos están planteados de una forma innovadora y poco convencional para que el estudiante se sienta motivado ante el reto de comprobar su capacidad intelectual y sea capaz de potenciarla. Para saber cuál es el nivel alcanzado, se han incluido las soluciones de la mayoría de los ejercicios.

ÍNDICE

PARTE 4

LA CIENCIA

En lo que a la ciencia se refiere, en primer lugar, se puede afirmar que, es el conjunto de conocimientos que define el orden dentro de la naturaleza y las causas de ese orden. En segundo lugar, la ciencia es una acción humana perenne que representa los esfuerzos, los hallazgos y la sabiduría colectivos de la raza humana, es decir, se trata de una actividad dedicada a reunir conocimientos acerca del mundo para organizarlos y condensarlos en leyes y teorías demostrables.

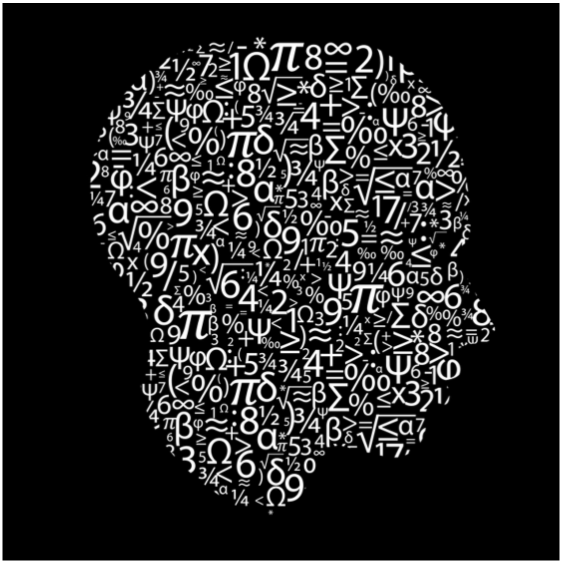
La ciencia se inició antes que la historia escrita, cuando los seres humanos descubrieron regularidades y relaciones en la naturaleza, como la disposición de las estrellas en el cielo nocturno; las pautas climáticas cuando se iniciaba la estación de lluvias o cuando los días eran más largos. A partir de estas regularidades la gente aprendió a hacer predicciones que les permitían tener algo de control sobre su entorno (Morfín, 2010).

La ciencia obtuvo grandes progresos en Grecia, en los siglos III y IV a. C. se difundió por el mundo mediterráneo. El avance científico casi se detuvo en Europa, cuando el Imperio Romano cayó en el siglo V d. C., las hordas bárbaras destruyeron casi todo en su ruta por Europa y así comenzó la llamada Edad del Oscurantismo. En esa época, los chinos y los polinesios cartografiaban las estrellas y los planetas, en tanto que las naciones arábigas desarrollaban las matemáticas y aprendían a producir vidrio, papel, metales y diversas sustancias químicas. Gracias a la influencia islámica, la ciencia griega regresó a Europa, la cual penetró en España durante los siglos X al XII. De esta manera, en el siglo XIII, surgieron universidades en Europa y la introducción de la pólvora cambió la estructura sociopolítica del viejo continente en el siglo XIV. El siglo XV vivió la sublime combinación de arte y ciencia lograda por Leonardo da Vinci. El pensamiento científico fue impulsado en el siglo XVI con la invención de la imprenta (Eisenstein, 1994).

Nicolás Copérnico, astrónomo polaco del siglo XVI causó gran controversia al publicar un libro donde proponía que el Sol era estacionario y que la Tierra giraba a su alrededor. Tales ideas eran opuestas a la creencia popular de que la Tierra era el centro del Universo, y como eran contrarias a las enseñanzas de la Iglesia, estuvieron prohibidas durante 200 años. Galileo Galilei, físico italiano, fue arrestado por divulgar la teoría de Copérnico y sus propias contribuciones al pensamiento científico. No obstante, un siglo después, fueron aceptadas por quienes defendieron las ideas de Copérnico (Bethune, 2019).

Esta clase de ciclos suceden una era tras otra. A principios del siglo XIX, los geólogos enfrentaron una violenta condena porque sus posturas diferían de la explicación de la creación dada por el Génesis. Después, en el mismo siglo, la geología fue aceptada, aunque las teorías de la evolución siguieron condenadas y se prohibió su enseñanza. Cada era ha tenido grupos de rebeldes intelectuales, quienes fueron condenados y a veces perseguidos en su tiempo, pero después se les consideraría inofensivos y a menudo esenciales para el mejoramiento de las condiciones humanas (González, 2009).

MATEMÁTICAS: EL LENGUAJE DE LA CIENCIA



El lenguaje universal del entendimiento del universo cambió desde que las matemáticas y la ciencia se integraron hace unos pocos siglos, la ciencia y las condiciones de vida han progresado en forma asombrosa. Cuando las ideas de la ciencia se expresan en términos matemáticos son concretas. Las ecuaciones de la ciencia son expresiones compactas de relaciones entre conceptos, que minimizan las confusiones, que con frecuencia aparecen en la discusión de las ideas expresadas con lenguaje cotidiano. Cuando los hallazgos en la naturaleza se expresan matemáticamente son más fáciles de comprobar o de rechazar usando experimentos. Las ecuaciones son guías de razonamiento que demuestran las conexiones entre los conceptos de la naturaleza. Los métodos de las matemáticas y la experimentación han guiado a la ciencia hacia un éxito enorme (Zúñiga, 2003).

CIENCIA Y TECNOLOGÍA

Existen diferencias entre la ciencia y la tecnología. La ciencia se ocupa de reunir conocimientos y de organizarlos. La tecnología permite al hombre usar esos conocimientos para fines prácticos y brinda las herramientas que necesitan los científicos en sus investigaciones.

No obstante, la tecnología es una espada de dos filos que puede resultar útil o nociva. Por ejemplo, contamos con la tecnología para extraer combustibles fósiles del suelo para después quemarlos y generar energía. La producción de energía a través de combustibles fósiles ha beneficiado a nuestra sociedad de incontables maneras. Por otro lado, la quema de combustibles fósiles pone en riesgo al ambiente. Resulta tentador echar la culpa a la tecnología misma por problemas como la contaminación, el agotamiento de los recursos y hasta por la explosión demográfica. Sin embargo, estos problemas no son culpa de la tecnología, así como una herida de bala no es culpa del arma de fuego. Los seres humanos usamos la tecnología y somos los responsables de la manera en que se la utiliza (Nuria & Pilar, 2010).

Es notable que ya poseamos la tecnología para resolver muchos problemas de medio ambiente. Es probable que el siglo XXI vea un cambio de combustibles fósiles a fuentes de energía más sustentables, como la fotovoltaica, heliotérmica o la conversión de la biomasa. Si bien el papel usado en la impresión de este libro proviene de los árboles, pronto se obtendrá de la maleza de rápido crecimiento y se necesitará menos de él cuando se popularicen las pantallas pequeñas y de fácil lectura. Cada vez reciclamos más los productos de desecho. En algunas partes del mundo se avanza en el control de la explosión demográfica que agrava casi todos los problemas con que se enfrentan hoy los seres humanos. El máximo obstáculo para resolver los problemas actuales se debe más a la inercia social que a la carencia de tecnología. La tecnología es nuestra herramienta. Lo que hagamos con ella depende de nosotros mismos. La promesa de la tecnología siempre será un mundo más limpio y saludable. Las aplicaciones adecuadas de la tecnología pueden guiarnos hacia un mundo mejor (Ramírez et al., 2018).

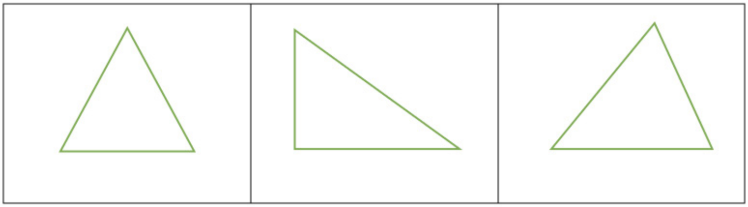
PARTE 1
RAZONAMIENTO LÓGICO

EL MÉTODO INDUCTIVO DE RAZONAMIENTO

En la antigüedad los matemáticos con frecuencia probaban la veracidad o la falsedad de una proposición mediante la observación directa o mediciones. Aunque éste es un método importante para adquirir información, no siempre es digno de confianza (Sánchez, 2012).

Intentemos, en los ejemplos siguientes, obtener ciertas conclusiones mediante el método de observación o medición.

Ejemplo: Dibuje varios triángulos y, usando el transportador, determine la medida de cada uno de los ángulos del triángulo. Calcule la suma de las medidas de los tres ángulos de cada triángulo. ¿A qué conclusión podría llegarse acerca de esta suma para cualquier triángulo?



Si los ángulos de los triángulos se midieron cuidadosamente, usted descubrirá que la suma de las medidas de los tres ángulos de cualquiera de los triángulos siempre se aproximará a 180°. Como resultado de tales medidas, ¿se justificaría que se estableció, inequívocamente, que la suma de las medidas de los tres ángulos de cualquier triángulo es 180°?

Consideremos las consecuencias de llegar a una conclusión así. Primero, los triángulos tuvieron que trazarse para medir los ángulos. El grueso de las líneas que representan los lados de estos triángulos variará de acuerdo con la precisión del instrumento de dibujo. El transportador con el cual se miden los ángulos sólo está dividido aproximadamente en grados (°). Así, el transportador no pudo mostrar una diferencia de $\frac{1}{10}$ (1/10) de grado que podría existir entre la suma de las medidas de los ángulos de dos triángulos. No importa que tan finos puedan trazarse los lados de un triángulo o que tan exacto sea el instrumento de medición, siempre existirá la posibilidad de que, si se aumentara la exactitud de las mediciones, podría descubrirse un ligero error en el ángulo suma.

Un segundo error al establecer como una verdad absoluta que la suma de las medidas de los ángulos de cualquier triángulo es 180° es la presunción de que lo que puede ser cierto para un número limitado de casos debe ser cierto para todos los casos. Esta no es una práctica indudable. Sería más seguro establecer que los resultados de nuestra experiencia nos inducen a creer que probablemente el ángulo suma de cualquier triángulo es igual a 180°.

El razonamiento inductivo se caracteriza por la obtención de una conclusión general (haciendo una suposición o conjetura) a partir de observaciones repetidas en ejemplos específicos. La suposición puede ser verdadera o no.

Ejemplo: Considere la siguiente lista de números naturales:

2,9,16,23,30, ···

¿Cuál es el número que sigue en la lista? ¿Cuál es el patrón? Después de analizar los números, vemos que 2+7=9, y 9+7=16. ¿Sumamos 16 y 7 para obtener 23? ¿Sumamos 23 y 7 para obtener 30? Sí. Parece que cualquier número en la lista se obtiene sumando 7 al número precedente, de modo que el siguiente número de la lista sería 30+7=37.
Para encontrar el «siguiente número» realizamos un razonamiento a partir de la observación de los números de la lista. Pudimos haber pasado de estas observaciones al enunciado general de que cualquier número en la lista es 7 más el número precedente. Este es otro ejemplo de razonamiento inductivo.

Usando razonamiento inductivo concluimos que 37 era el número siguiente. Suponga que la persona que está haciendo la lista tiene otra respuesta en mente. La lista de números en realidad representa las fechas de los viernes de junio si el 1 de junio cae en jueves. El siguiente viernes después del 30 de junio es el 7 de julio. Con este patrón, la lista continúa como

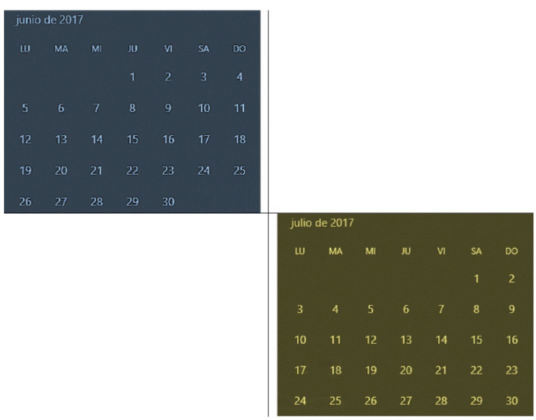
2,9,16,23,30,7,14,21,28, ···

¿Cuál es el número que sigue en la lista? ¿Cuál es el patrón? Después de analizar los números, vemos que 2+7=9, y 9+7=16. ¿Sumamos 16 y 7 para obtener 23? ¿Sumamos 23 y 7 para obtener 30? Sí. Parece que cualquier número en la lista se obtiene sumando 7 al número precedente, de modo que el siguiente número de la lista sería 30+7=37.
Para encontrar el «siguiente número» realizamos un razonamiento a partir de la observación de los números de la lista. Pudimos haber pasado de estas observaciones al enunciado general de que cualquier número en la lista es 7 más el número precedente. Este es otro ejemplo de razonamiento inductivo.

Usando razonamiento inductivo concluimos que 37 era el número siguiente. Suponga que la persona que está haciendo la lista tiene otra respuesta en mente. La lista de números en realidad representa las fechas de los viernes de junio si el 1 de junio cae en jueves. El siguiente viernes después del 30 de junio es el 7 de julio. Con este patrón, la lista continúa como

2,9,16,23,30,7,14,21,28, ···

Como se muestra en el calendario de la figura.

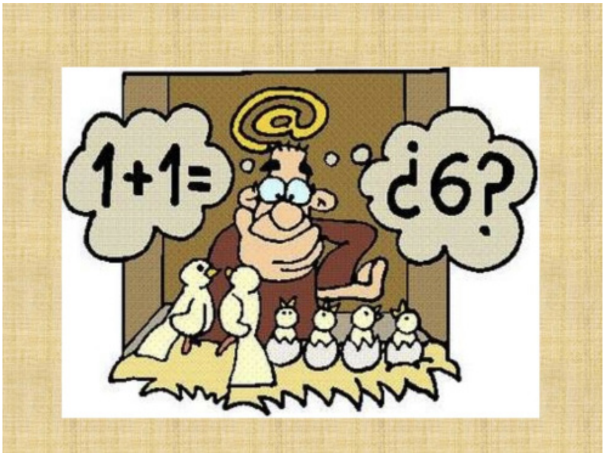


La respuesta correcta sería entonces 7. El proceso usado para obtener la regla «sumar 7» en la lista anterior revela una falla importante del razonamiento inductivo. Nunca podemos estar seguros de que la verdad en un caso específico será verdad en lo general. El razonamiento inductivo no garantiza un resultado verdadero, pero ofrece los medios necesarios para hacer una suposición o conjetura.

En los ejemplos anteriores, el razonamiento que se usó para llegar a las conclusiones se conoce como razonamiento inductivo. Se llega a una conclusión general, investigando cierto número de casos particulares. Este es un método de investigación. Gracias al razonamiento inductivo, se hicieron grandes aportes a la civilización. Con este método, se observa, se mide, se estudian las relaciones, se calcula y se sacan conclusiones. Tales conclusiones provisionales se llaman hipótesis. La hipótesis indica una proposición que posiblemente es cierta, de acuerdo con la observación de un número limitado de casos.

Mientras más precisos sean los instrumentos de medición y más cuidadosas las observaciones y las mediciones, mayor es la probabilidad de que la hipótesis sea correcta. Las encuestas pre electivas nacionales se efectúan con base de observar una selección representativa del sector público en las diversas regiones del país. Los expertos han podido hacer predicciones muy exactas observando un porcentaje muy bajo de todo el electorado del sufragio nacional.

EL MÉTODO DEDUCTIVO DE RAZONAMIENTO



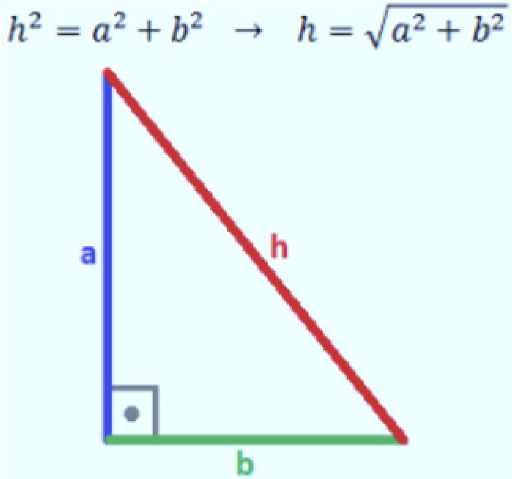
El razonamiento inductivo se basa en la observación de una propiedad común específica, en un número limitado de casos y concluye que esta propiedad es general para todos los casos. Por lo tanto, se procede de lo específico hacia lo general. No obstante, una teoría puede cumplirse para varios miles de casos y, entonces, fracasar en el siguiente. Nunca podemos estar absolutamente seguros de que las conclusiones basadas en el razonamiento inductivo son siempre verdaderas.

Un método más convincente y poderoso de sacar conclusiones es el llamado razonamiento deductivo. Cuando se razona deductivamente, se va de lo general a lo específico (Mesa, 2004).

El razonamiento deductivo se caracteriza por la aplicación de principios generales a ejemplos específicos.

Ejemplo: Considere el teorema de Pitágoras: «en un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa».

De modo que si sabemos que los lados más cortos (catetos: a y b) de un triángulo rectángulo son de 3 y 4 centímetros, podemos calcular la longitud del lado más largo (hipotenusa: h).



$$h=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$h=\sqrt{3^2+4^2}$$

$$h=\sqrt{(9+16)}$$

$$h=\sqrt{25}$$

$$h=5$$

Por lo tanto, la hipotenusa mide 5 centímetros. Usamos la regla general (el teorema de Pitágoras) y la aplicamos a una situación específica.

El razonamiento de un problema normalmente requiere algunas premisas. Una premisa puede ser un supuesto, una hipótesis, una ley, una regla, una idea ampliamente aceptada o una observación. Luego se razona deductiva o inductivamente a partir de las premisas para obtener una conclusión. Las premisas y la conclusión integran un argumento lógico.

Cuando se aceptan ciertas premisas, inevitablemente se llega a cierta conclusión. Esta conclusión puede ser falsa, si las premisas en las cuales se basa son falsas. Entonces, es imperativo que se distinga entre validez y verdad.

Considérense las proposiciones siguientes:

(1) Todos los hombres son valientes.
(2) Juan Pérez es un hombre.
(3) Juan Pérez es valiente.

La proposición (3) es una conclusión válida de las premisas (1) y (2), pero no es necesariamente cierta. Si la premisa (1) o bien la premisa (2) es falsa, es posible que la conclusión (3) no sea verdadera. Es necesario, para aspirar a la verdad de las conclusiones que se considere cuidadosamente la verdad de las premisas básicas en las cuales se basan.

Ejemplo: Identifique cada premisa y la validez de la conclusión de cada uno de los siguientes argumentos. Luego indique si cada argumento es un ejemplo de razonamiento inductivo o deductivo. Si no se menciona conclusión alguna proponga una.

(a) Mi casa está hecha de ladrillo. Mis vecinos a ambos lados tienen casas de ladrillo. Por lo tanto, todas las casas del rumbo están hechas de ladrillo.

Las premisas son: «mi casa está hecha de ladrillo» y «mis vecinos a ambos lados tienen casas de ladrillo». La conclusión es «por lo tanto, todas las casas del rumbo están hechas de ladrillo». Como el razonamiento va de los ejemplos específicos al enunciado general, el argumento es un ejemplo de razonamiento inductivo. Sin embargo, la conclusión podría ser falsa.

(b) El perro de la señora Gómez ladra cada vez que un extraño entra al patio de su casa. El perro de la señora Gómez está ladrando.

No existe conclusión; el perro puede estar ladrando por alguna razón diferente a la presencia de un extraño.

(c) Todos los teclados tienen el símbolo @. Yo tengo un teclado. Yo puedo teclear el símbolo @.

Aquí, las premisas son «todos los teclados tienen el símbolo @» y «yo tengo un teclado». La conclusión es «yo puedo teclear el símbolo @» Como el razonamiento va de lo general a lo específico de modo que se usa un razonamiento deductivo. No obstante, la conclusión podría ser falsa; mi teclado pudiera ser un poco antiguo.

(d) Hoy es martes. Mañana será miércoles.

Aquí sólo hay una premisa: «hoy es martes». La conclusión es: «mañana será miércoles», y es evidentemente válida. Se considera el hecho de que el miércoles sigue inmediatamente al martes, aun cuando este hecho no se establece de manera explícita. Como la conclusión surge de hechos generales que se aplican a este caso especial se usó el razonamiento deductivo.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Responda las siguientes preguntas siguientes, y compruebe su habilidad para leer y razonar.

1. Todos los individuos de la tribu Waka tienen la piel oscura. Ninguna persona de piel oscura tiene los ojos azules. Por lo tanto:

   (a) Ningún hombre de la tribu Waka tiene los ojos azules.
   (b) Algunos de los hombres de piel oscura son miembros de la tribu Waka.
   (c) Algunas personas con ojos azules no tienen la piel oscura.
   (d) Algunos hombres de la tribu Waka tienen los ojos azules.

2. Sólo los estudiantes sobresalientes obtienen becas. Todos los estudiantes sobresalientes ganan publicidad. Por lo tanto:

(a) Todos los estudiantes que ganan publicidad obtienen becas.
(b) Todos los estudiantes que obtienen becas ganan publicidad.

(c) Sólo los estudiantes con publicidad obtienen becas.
(d) Algunos estudiantes que no ganan publicidad obtienen becas.

3. Si todos los románticos son soñadores, entonces:

(a) Todos los soñadores son románticos.
(b) Ningún soñador es romántico.
(c) Algunos románticos no son soñadores.
(d) Algunos soñadores no son románticos.

4. ¿Qué día está antes del sábado en la misma medida que está después del martes?

(a) Lunes
(b) Martes
(c) Miércoles
(d) Jueves

5. En una caja se tienen 9 bolitas rojas y 7 bolitas negras. ¿Cuántas bolitas se deben sacar como mínimo, al azar, para tener con seguridad una bolita de cada color?

(a) 8
(b) 9
(c) 10
(d) 16

6. Si todos los taxistas trabajan sentados, y si algunos maestros son taxistas. Entonces:

(a) Todos los taxistas son maestros.
(b) Algunos taxistas no trabajan sentados.
(c) Algunos maestros trabajan sentados.
(d) Ningún maestro trabaja sentado.

7. Si todas las arañas tienen seis patas y todos los seres de seis

patas tienen alas, entonces:

(a) Las arañas son insectos.
(b) Todos los insectos vuelan.
(c) Todas las arañas tienen alas.
(d)¡ Algunas arañas no tienen alas.

8. Un CD y un cuaderno pesan más que un reloj y un CD. Un cuaderno y un reloj pesan más que un CD y un cuaderno. Indicar el objeto que pesa más que los otros.

(a) El reloj.
(b) El CD.
(c) El cuaderno.
(d) El CD o el cuaderno.

9. Él, tú y yo sentimos hambre, frío y sed (no necesariamente en ese orden); si tú me das de comer, entonces yo te abrigo. Luego, él siente:

(a) Hambre
(b) Frío
(c) Sed
(d) Dolor

10. María y Karla resolvieron tantos problemas de matemática como Luisa y Gina. Carmen resolvió más que Gina y Gina mucho más que Karla. Juana resolvió más que María. ¿Quién resolvió más problemas?

(a) María
(b) Gina
(c) Juana
(d) Karla
(e) Luisa

11. José es mayor que Pablo y Roberto es menor que Pancho;

pero éste y José tienen la misma edad. Además, Roberto es menor que Pablo. De las siguientes proposiciones, son correctas:

I. José es menor que Roberto
II. José es mayor que Roberto
III. Pablo es menor que Pancho
IV. Pablo es mayor que Pancho

(a) Solo I
(b) Solo III
(c) Solo II
(d) Solo IV
(e) II y III

12. Tres amigos estudiaron en la universidad, abogacía, docencia e ingeniería. Cada uno de ellos tiene un hijo, que ingresó a la universidad, siguiendo una carrera distinta de la de su padre, prefiriendo en cambio, la carrera de uno de los amigos de su padre. Sabiendo que Luis es Ingeniero y que el hijo de Ricardo quiere ser profesor, ¿qué profesión tiene Juan y a cuál quiere dedicarse el hijo de Carlos?

(a) Ricardo es abogado. Hijo de Carlos abogado.
(b) Ricardo es profesor. Hijo de Carlos, profesor.
(c) Ricardo es abogado. Hijo de Carlos, ingeniero.
(d) Ricardo es profesor. Hijo de Carlos abogado.
(e) Ricardo es profesor. Hijo de Carlos, ingeniero.

13. Alexandra se encuentra al este de Ana, Sonia se encuentra al Oeste de Jacky. ¿Qué información falta para saber que Sonia está al Oeste de todos?

(a) Ana está al Oeste de Alexandra.
(b) Jacky se encuentra al este de Alexandra.
(c) Jacky se encuentra al este de Ana.
(d) Sonia está al oeste de Alexandra.
(e) Jacky está al oeste de Ana.

14. Si todos los románticos son soñadores, entonces:

(a) Todos los soñadores son románticos.
(b) Ningún soñador es romántico.
(c) Algunos románticos no son soñadores.
(d) Todo no soñador es romántico.
(e) Algunos románticos son soñadores.

15. Si algunas aves son vivíparas y todas las aves vuelan, se concluye que:

(a) Algunos vivíparos vuelan.
(b) Todas las aves son vivíparas.
(c) Algunos vivíparos no vuelan.
(d) Nadie que sea ave vuela.
(e) Muchos no vivíparos vuelan.

16. ¿Qué día está antes del sábado en la misma medida que está después del martes?

(a) Lunes
(b) Martes
(c) Jueves
(d) Viernes
(e) Miércoles

17. De tres hermanas: Mónica, Jenny y Rosa, se sabe que:
La mayor solo lava la ropa de la última, que aún es bebé.
Rosa lava su ropa y la de Jenny, que es la que compra el jabón.
De las tres, ¿quién es la mayor y quién es la menor? (en ese orden).

(a) Rosa y Jenny
(b) Rosa y Mónica
(c) Mónica y Rosa
(d) Jenny y Rosa
(e) Jenny y Mónica.

18. Tres amigas: Yolanda, Pamela y Karen, se fueron de paseo a conocer Piura, Arequipa y Cusco, aunque no necesariamente en ese orden, Karen conoce solamente toda la costa y Yolanda se fue al Sur. ¿A dónde fue Pamela'

(a) Piura
(b) Cusco
(c) Arequipa
(d) Piura o Cusco
(e) Cusco o Arequipa

19. Cuatro sospechosos de haber atropellado con su auto a un peatón hicieron las siguientes afirmaciones cuando fueron interrogados por la policía:
María: "Fue Lucía"
Lucía: "Fue Leticia"
Irene: "Yo no fui"
Leticia: "Lucía miente"

(a) María
(b) Irene
(c) Leticia
(d) Lucía
(e) Policía

20. Xiomara, Yovana, Alex y Socorro están sentados en una fila de cuatro sillas numeradas del 1 al 14.
Daniel los mira y dice:
"Yovana está al lado de Alex y Xiomara está entre Yovana y Alex"; pero sucede que las dos afirmaciones que hizo Daniel son falsas, en realidad Yovana está en la silla número 3. ¿Quién está en la silla número 2?

(a) Xiomara
(b) Yovana
(c) Alex

(d) Socorro
(e) Daniel

21. Si todos los taxistas trabajan sentados.
-Algunos maestros son taxistas.
Entonces:

(a) Todos los taxistas son maestros
(b) Algunos taxistas no trabajan sentados.
(c) Algunos maestros trabajan sentados.
(d) Ningún maestro trabaja sentado.
(e) Todo taxista es maestro.

22. Si "todo vertebrado es cuadrúpedo", entonces:

(a) Algunos cuadrúpedos son no vertebrados.

(b) Todo cuadrúpedo es no vertebrado
(c) Algunos vertebrados son no cuadrúpedos.
(d) Algunos no vertebrados son cuadrúpedos.
(e) Todo no vertebrado es cuadrúpedo.

23. Si: "Es falso que ningún juez es injusto"

(a) Todo juez es injusto.
(b) Muchos jueces no son justos.
(c) Muchos jueces son justos.
(d) Todos los jueces son justos.
(e) Algunos jueces no son justos.

24. Un libro y un cuaderno pesan más que un reloj y un libro. Un cuaderno y un reloj pesan más que un libro y un cuaderno. Indicar el objeto que pesa más que los otros.

(a) El reloj
(b) El libro
(c) El cuaderno

(d) El libro o el cuaderno
(e) El libro o el reloj

25. Si Roger es el único compadre del padrino del único enamorado de la enamorada de Rubén, ¿Qué será de Rubén el único bisnieto del abuelo de Roger?

(a) Su hijo
(b) Su nieto
(c) Su hermano
(d) El mismo
(e) Su padre

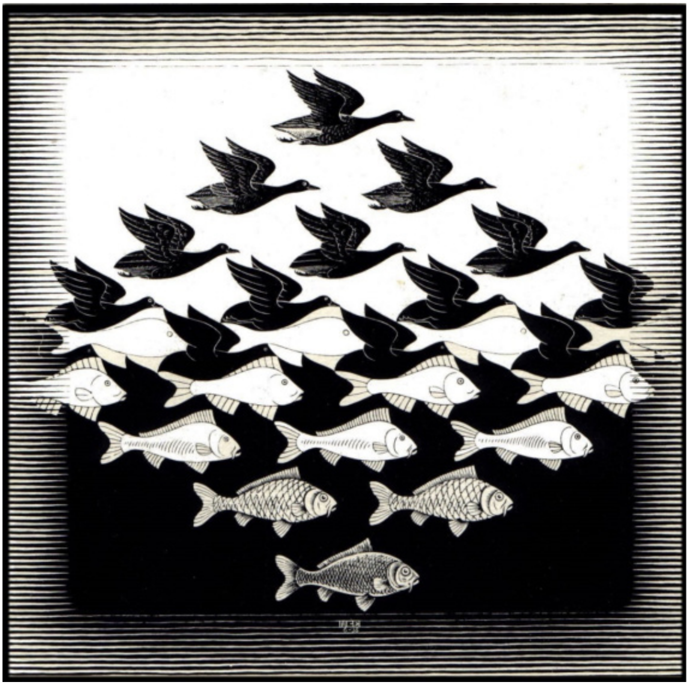
26. Si el sábado es el lunes del martes y el martes es el jueves del viernes, ¿Qué es el sábado del domingo?

(a) Miércoles
(b) Jueves
(c) Viernes
(d) Sábado
(e) Domingo

27. ¿Quién es la única nieta de la abuela de la madre de Liz?

(a) Liz
(b) La abuela de Liz
(c) La madre de Liz
(d) La bisabuela de Liz
(e) La hija de Liz

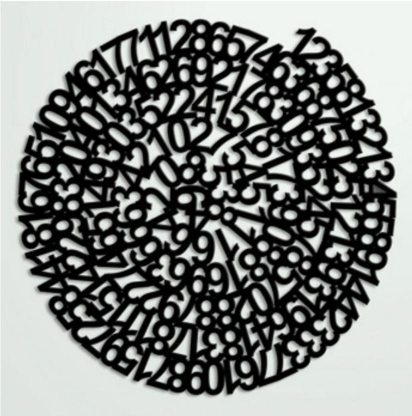
PATRONES



El hablar de patrones es hablar de regularidades. Las regularidades están en todas partes y ser capaz de encontrarlas es una habilidad esencial.
Una lista de números u objetos que sigue una cierta regla, criterio o medida se dice que tiene un patrón (de formación).

A veces es posible, tan solo mirar una secuencia de objetos (entes o números), reconocer lo que sucede y averiguar qué objeto debe venir a continuación. En otros casos, cuando la secuencia es más compleja, no es tan fácil deducir cómo se hace. Cuando te encuentras con estos patrones más complicados, es útil tener una estrategia para encontrar cómo se determinó el patrón de forma lógica o matemática (a veces el sentido común también puede ayudar). Una vez que sabe cómo encontrar el patrón, puede encontrar cualquier objeto de la secuencia.

SECUENCIAS NUMÉRICAS



Una lista de números ordenados como

$$3,4,15,21,27,\cdots$$

se llama *secuencia*. Una **secuencia numérica** es una lista de números que tiene un primer número, un segundo número, un tercer número y así sucesivamente, llamados **términos** de la secuencia.

Identificación de Secuencias Aritméticas y Secuencias Geométricas

La secuencia que inicia con

$$5,9,13,17,21,\cdots$$

Es una *secuencia aritmética o progresión aritmética*. En una **secuencia aritmética**, cada término después del primero se obtiene sumando el mismo número, llamado la **diferencia común**.

Para calcular la diferencia común, se elige cualquier número después del primero y se le resta el término anterior. Si elegimos 9-5 (el segundo término menos el primero), por ejemplo, vemos que la diferencia común es 4. Para obtener el término que sigue al 21, le sumamos 4 para obtener 21+4=25.

De manera similar, la secuencia que inicia con

$$2,4,8,16,32,\cdots$$

Es una secuencia geométrica o progresión geométrica. En una **secuencia geométrica**, cada término después del primero se obtiene multiplicando el mismo número, llamado la **razón común**.

Para calcular la razón común, se elige cualquier número después del primero y se le divide para término anterior. Si elegimos 16÷8 (el cuarto término dividido entre el tercero), por ejemplo, vemos que la razón común es 2. Para obtener el término que sigue al 32, le multiplicamos por 2 para obtener 32×2=64.

Ejemplo 1: En cada secuencia, determine si se trata de una secuencia aritmética o de una secuencia geométrica. Ya sea aritmética o geométrica, dé el siguiente término de la secuencia.

(a) $5,10,15,20,25,\cdots$
(b) $2,6,18,54,162,\cdots$
(c) $-5,-3,-1,1,3,\cdots$
(d) $1,4,9,16,25,\cdots$

Solución:

(a) Si seleccionamos cualquier término después del primero y le restamos el término anterior, obtenemos la diferencia común de 5.

$$10-5=15-10=20-15=25-20=5$$

Por lo tanto, esta es una secuencia aritmética. El siguiente término en la secuencia es 30, obtenido así:

$$25+5=30$$

(b) Si seleccionamos cualquier término después del primero y le dividimos para el término anterior, obtenemos la razón común de 3.

$$6/2=18/6=54/18=162/54=3$$

Por lo tanto, esta es una secuencia geométrica. El siguiente término en la secuencia es 486, obtenido así:

$$162\times3=486$$

(c) Si seleccionamos cualquier término después del primero y le restamos el término anterior, obtenemos la diferencia común de 2.

$$-3-(-5)=-1-(-3)=1-(-1)=3-1=2$$

Por lo tanto, esta es una secuencia aritmética. El siguiente término en la secuencia es 5, obtenido así:

$$3+2=5$$

(d) Mientras que aquí existe un patrón (cada término es el cuadrado de los números: $1,2,3,4,5,\cdots$), no existe una diferencia común ni una razón común, como puede comprobarse. Esta secuencia no es ni aritmética ni geométrica.

DIFERENCIAS SUCESIVAS

Algunas secuencias presentan mayor dificultad para hacer una conjetura acerca del término que sigue. Con frecuencia se debe aplicar el método de **diferencias sucesivas** en estos casos. Considere la secuencia

$$2,6,22,56,114,\cdots$$

Nótese que esta secuencia no es ni aritmética ni geométrica; pero, en cambio considere las siguientes diferencias sucesivas:

Ejemplo 1:

<table>
<tr><td>❶</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">6</td><td colspan="2">22</td><td colspan="2">56</td><td colspan="2">114</td><td colspan="2">?</td></tr>
<tr><td>❷</td><td></td><td colspan="2">$6-2$
$=4$</td><td colspan="2">$22-6$
$=16$</td><td colspan="2">$56-22$
$=34$</td><td colspan="2">$114-56$
$=58$</td><td colspan="2">$?-114$</td><td></td></tr>
<tr><td>❸</td><td></td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">16</td><td colspan="2">34</td><td colspan="2">58</td><td colspan="2">?−114</td><td></td></tr>
<tr><td>❹</td><td></td><td></td><td colspan="2">$16-4$
$=12$</td><td colspan="2">$34-16$
$=18$</td><td colspan="2">$58-34$
$=24$</td><td colspan="2">$?-114$
-58
$=?-172$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>❺</td><td></td><td></td><td colspan="2">12</td><td colspan="2">18</td><td colspan="2">24</td><td colspan="2">?−172</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>❻</td><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">$18-12$
$=6$</td><td colspan="2">$24-18$
$=6$</td><td colspan="2">$?-172$
-24
$=?-196$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>❼</td><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">6</td><td colspan="2">6</td><td colspan="2">?−196</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Como no es evidente cual es el término que sigue, se resta el primer término del segundo, el segundo del tercero, el tercero del cuarto, y así sucesivamente, tal como se indica en las filas ❷ y ❸.

Ahora se repite el proceso con la secuencia 4, 16, 34, 58 y se continúa así hasta que la diferencia sea un valor constante, tal como las secuencias aritméticas, cómo se muestra en las filas ❻ y ❼.

Así, para continuar con este patrón, debería aparecer otro 6 en la fila ❼, lo cual significa que el término buscado (?) debe ser 202, obtenido de:

?-196=6
?=6+196
?=202

Y, nuestra tabla quedaría, finalmente, así:

❶	2	6	22	56	114	$114 + 88 = 202$	
❷		4	16	34	58	$58 + 30 = 88$	
❸			12	18	24	$24 + 6 = 30$	
❹				6	6	6	

Ejemplo 2: Determine el número que sigue en la secuencia 14,22,32,44,58, ···

Solución:

❶	14	22	32	44	58	?	
❷		$22 - 14 = 8$	$32 - 22 = 10$	$44 - 32 = 12$	$58 - 44 = 14$	$? - 58$	
❸		8	10	12	14	$? - 58$	
❹			$10 - 8 = 2$	$12 - 10 = 2$	$14 - 12 = 2$	$? - 58 - 14 = ? - 72$	
❺			2	2	2	$? - 72$	

Así, para continuar con este patrón, debería aparecer otro 2 en la fila ❺, lo cual significa que el término buscado (?) debe ser 74, obtenido de:

$$?-72=2$$
$$?=2+72$$
$$?=74$$

Y, finalmente, tenemos:

❶	14	22	32	44	58	$58 + 16 = 74$	
❷		8	10	12	14	$14 + 2 = 16$	
❸			2	2	2	2	

Ejemplo 3: Determine el número que sigue en la secuencia

$$5,15,37,77,141,\cdots$$

Solución:

❶	**5**	**15**	**37**	**77**	**141**	**?**
❷	$15-5=10$	$37-15=22$	$77-37=40$	$141-77=64$	$?-141$	
❸	**10**	**22**	**40**	**64**	$\mathbf{?-141}$	
❹		$22-10=12$	$40-22=18$	$64-40=24$	$?-141-64=?-205$	
❺		**12**	**18**	**24**	$\mathbf{?-205}$	
❻			$\mathbf{18-12=6}$	$\mathbf{24-18=6}$	$\mathbf{?-205-24=?-229}$	
❼			**6**	**6**	$\mathbf{?-229}$	

Así, para continuar con este patrón, debería aparecer otro 6 en la fila ❼, lo cual significa que el término buscado (?) debe ser 235, obtenido de:

$$?-229=6$$
$$?=6+229$$
$$?=235$$

Como se observa en la tabla:

❶	**5**	**15**	**37**	**77**	**141**	**141+94=235**
❸	**10**	**22**	**40**	**64**	$\mathbf{64+30=94}$	
❺		**12**	**18**	**24**	$\mathbf{24+6=30}$	
❼			**6**	**6**	**6**	

OTRAS SECUENCIAS NUMÉRICAS

El método de las diferencias sucesivas no siempre funciona. Por ejemplo, inténtelo con la secuencia: 1,1,2,3,5,8,13,21, … y vea qué sucede. En esta secuencia, iniciando con el tercer número de la lista, el 2, cada número se obtiene sumando los dos números anteriores de la secuencia; así:

$$1+1=2, \qquad 1+2=3, \qquad 2+3=5,$$

Y así sucesivamente. El siguiente número en esta lista es 13+21=34. (Estos son los términos iniciales de la popular secuencia de Fibonacci).

Muchas otras secuencias numéricas, no son ni aritméticas, ni geométricas y tampoco ayudan las diferencias sucesivas como las hemos presentado, más bien puede haber otras posibilidades, como procesos mixtos, patrones alternantes, operaciones aritméticas, etc. Algunas secuencias suponen una trampa, parecen demasiado fáciles o quizás imposibles al principio porque tendemos a pasar por alto una situación evidente. Examine con cuidado, y, por supuesto, nunca olvide usar el sentido común y su experiencia con escenarios anteriores.

Ejemplo 1: Determine el número que sigue en la secuencia

$$73,57,49,45,43,\cdots$$

Solución:

Observe esta secuencia es mixta, porque presenta de características de secuencia con diferencias sucesivas (fila ❷) y de secuencia geométrica con razón común 2 (fila ❹).

❶	73	57	49	45	43	?
❷	$57-73=-16$	$49-57=-8$	$45-49=-4$	$43-45=-2$	$?-43$	
❸	$\mathbf{-16}$	$\mathbf{-8}$	$\mathbf{-4}$	$\mathbf{-2}$	$?\,\mathbf{-43}$	
❹		$-16 \div (-8) = 2$	$-8 \div (-4) = 2$	$-4 \div (-2) = 2$	$-2 \div (?\,\mathbf{-43}) = \frac{2}{43-?}$	
❺		**2**	**2**	**2**	$\frac{2}{43-?}$	

Es lícito suponer que:
2/(43-?)=2

Con lo que ?=42, y así el término siguiente en la secuencia dada, es 42.

Ejemplo 2: Determine el número que sigue en la secuencia

1,5,14,30,55, ⋯
Solución:

Nótese que esta secuencia es combinada, presenta características de secuencia con diferencias sucesivas (fila ❷) y de cuadrados perfectos (fila ❹).

❶	1	5	14	30	55	?
❷	$5-1=4$	$14-5=9$	$30-14=16$	$55-30=25$	$?-55$	
❸	**4**	**9**	**16**	**25**	$?\,\mathbf{-55}$	
❹	$4=2^2$	$9=3^2$	$16=4^2$	$25=5^2$	$?\,\mathbf{-55} = \mathbf{6^2}$	

Con lo que ?=91, obtenido de ?-55=6^2 y así, el término siguiente en la secuencia dada, es 91.

SECUENCIAS LITERALES

Es un conjunto ordenado de letras de acuerdo con un criterio que puede ser:

(a) Iniciales de palabras conocidas. Por ejemplo:

L,M,M,J,V, ···

(Iniciales de los días de la semana...)

M,V,T,M,J, ···

(Iniciales de los planetas del Sistema Solar...)

(b) Formación de palabras.

C,A,N,A,D, ···

(Palabra Canadá)

A,R,U,G,I, ···

(Palabra "FIGURA" escrita en sentido inverso)
(c) Lugar que ocupa la letra en el alfabeto, de acuerdo con la siguiente correspondencia, que no considera ni la CH ni la LL. Existen otras posibilidades, en las que no consideran la letra Ñ, pero, esta es el más común.

Tabla Alfanumérica (sin CH ni LL)

A **1**	B **2**	C **3**	D **4**	E **5**	F **6**	G **7**
H **8**	I **9**	J **10**	K **11**	L **12**	M **13**	N **14**
Ñ **15**	O **16**	P **17**	Q **18**	R **19**	S **20**	T **21**
U **22**	V **23**	W **24**	X **25**	Y **26**	Z **27**	

Tabla Alfanumérica (sin CH ni LL ni Ñ)

A **1**	B **2**	C **3**	D **4**	E **5**	F **6**	G **7**
H **8**	I **9**	J **10**	K **11**	L **12**	M **13**	N **14**
O **15**	P **16**	Q **17**	R **18**	S **19**	T **20**	U **21**
V **22**	W **23**	X **24**	Y **25**	Z **26**		

Podríamos tener, por ejemplo:

W,T,P,N,J, ···

Reemplazando cada letra por el lugar que ocupa en el alfabeto.

W	T	P	N	J	···
24	21	17	14	10	···

Esta es una secuencia aritmética cuya diferencia común es -3, por lo tanto, el siguiente término numérico es 7, que se corresponde con la letra G. Con lo que, la letra que sigue es la G.

(d) Hay secuencias que combinan letras y números (secuencias alfanuméricas). En este caso, se aplica una mezcla de criterios.

Por ejemplo, qué número sigue en la siguiente secuencia mixta:

3; 7; 11; 15; R; V; ···

Pasemos las letras a números utilizando nuestra tabla alfanumérica para obtener la secuencia:

3; 7; 11; 15; 19; 23; ···

Esta es una secuencia aritmética con diferencia común 4, entonces el número que sigue es el 27, cuya la letra correspondiente es la Z.

DISTRIBUCIONES

Aquí se buscará alguna relación entre los números o letras dispuestos en una determinada figura. Se tendrá un conjunto de números dispuestos en un gráfico y relacionados mediante una regla de formación, la cual se obtiene con las operaciones básicas. El procedimiento es el siguiente: dados los escenarios (figuras completas) se debe deducir la regla de formación (patrón) y luego aplicarla en la última figura y obtener así el número desconocido.

Ejemplo: Halle el número que falta.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. ¿Qué número continúa en la sucesión?

1/2,3/4,5/6,7/8,9/10, ⋯

(a) 9/10
(b) 10/9
(c) 10/11
(d) 10/12
(e) 11/12

2. ¿Qué número continúa en la sucesión?

-1,2,-3,4,-5,6, ⋯

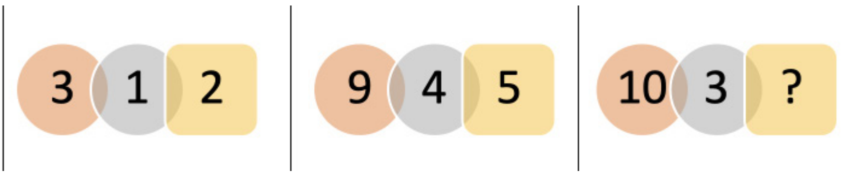
(a) 7
(b) -7
(c) 8
(d) -8
(e) 9

3. ¿Qué número continúa en la sucesión?

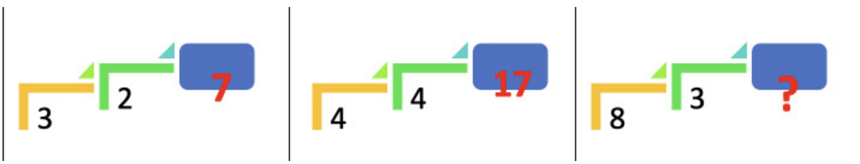
5,3,5,5,3,5,5,5,3,5,5,5,5,3,5,5,5,5, ···

(a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) 4
(e) 5

4. Complete con el número que falta.

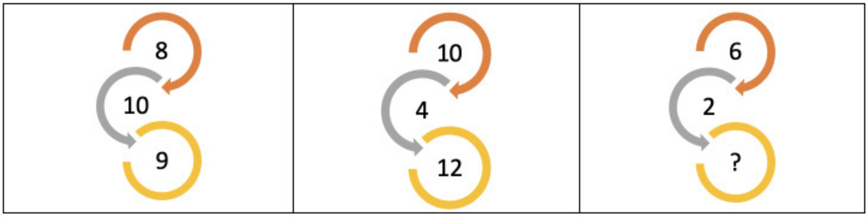


5. Complete con el número que falta.

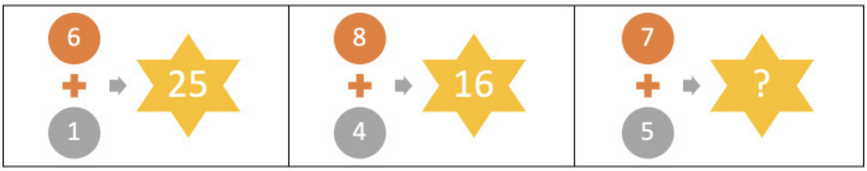


6. Complete con el número que falta.

7. Complete con el número que falta.

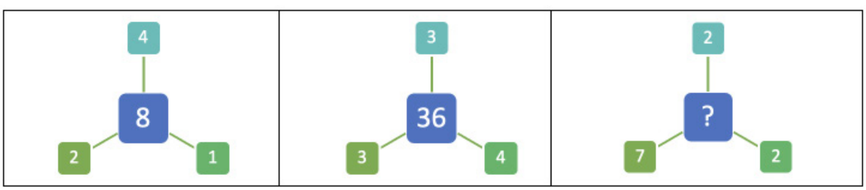


8. Complete con el número que falta.



9. Complete con el número que falta.

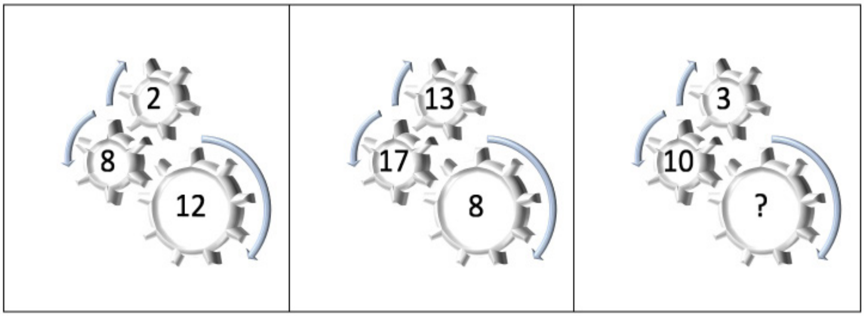
10. Complete con el número que falta.



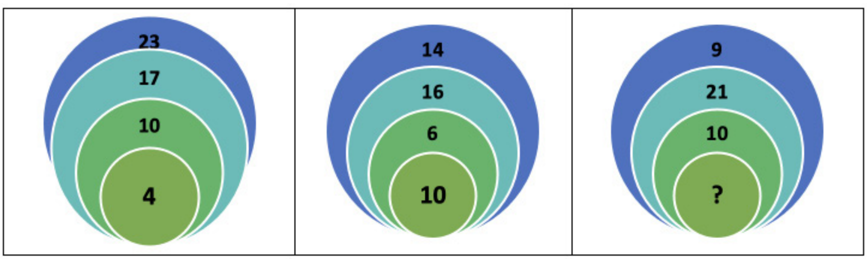
11. Complete con el número que falta.

20	30	?
22	21	25
23	28	71

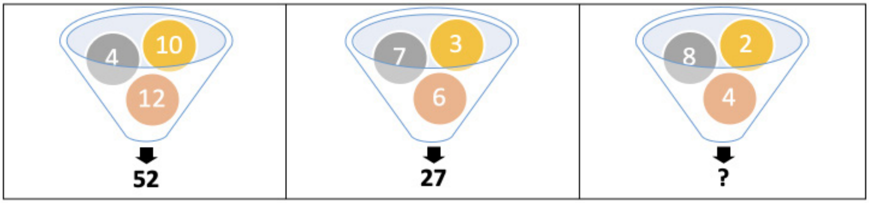
12. Complete con el número que falta.



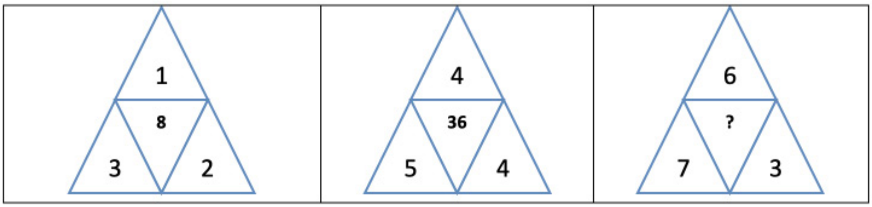
13. Complete con el número que falta.



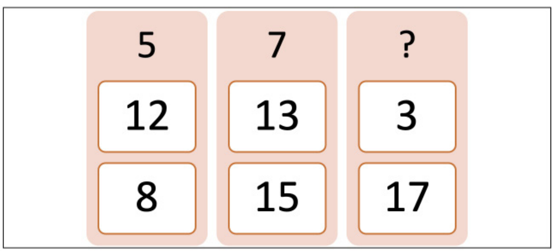
14. Complete con el número que falta.



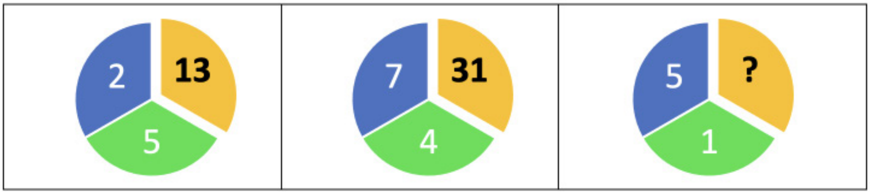
15. Complete con el número que falta.



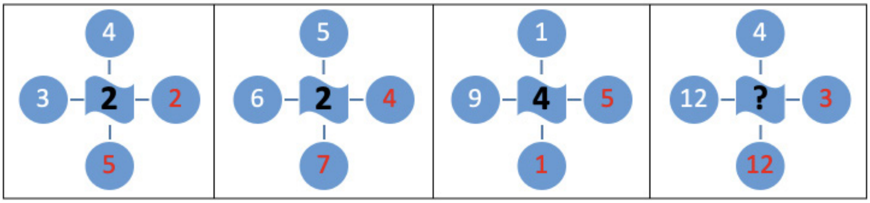
16. Complete con el número que falta.



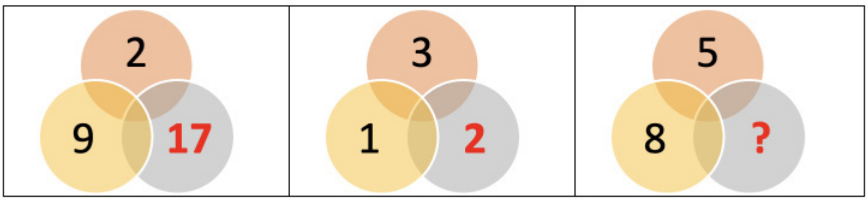
17. Complete con el número que falta.



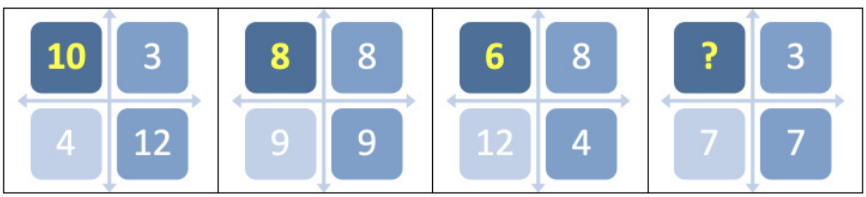
18. Complete con el número que falta.



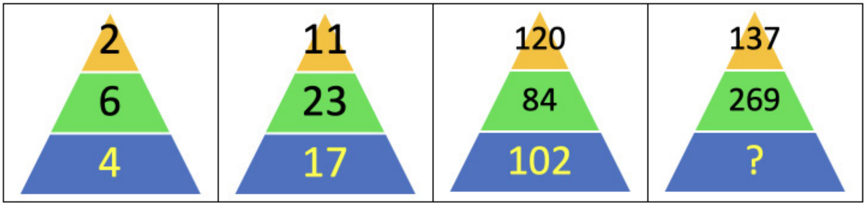
19. Complete con el número que falta.



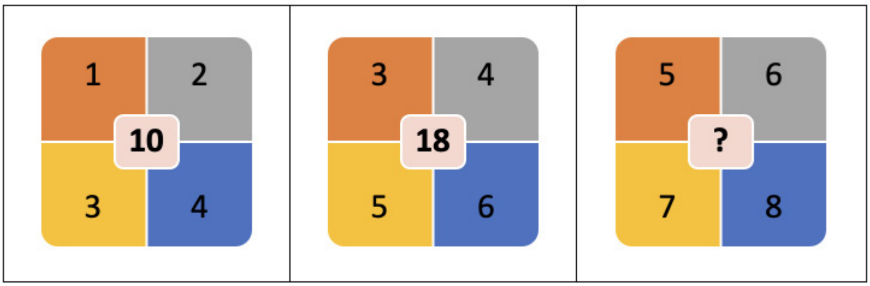
20. Complete con el número que falta.



21. Complete con el número que falta.



22. Complete con el número que falta.



23. Hallar x en:

-50; 0; 100; 190; 250; 300; x

(a) 400
(b) 408
(c) 410
(d) 420
(e) 450

24. Hallar x en:

12; 0; 0; 11; 33; 69; 127; x

(a) 222
(b) 223
(c) 129
(d) 160
(e) 180

25. Hallar $\underline{|x}$ en:

$$6; 14; 14; 14; 32; 96; \underline{|x}$$

(a) 100
(b) 150
(c) 180
(d) 212
(e) 244

26. Calcular el número que sigue:

1/2;1/2;1;3; ...

(a) 4
(b) 6
(c) 8
(d) 12
(e) 9

27. Determinar la letra que sigue:

A; D; I; O; ...

(a) V
(b) W
(c) Z
(d) Y
(e) X

28. ¿Qué término sigue?

3; 18; 34; 52; 74; ...

(a) 75
(b) 123
(c) 47
(d) 104
(e) N.A.

29. ¿Qué término sigue en?:

$1; 2; 6; 30; 210; \ldots$

(a) 1230
(b) 2310
(c) 275
(d) 218
(e) 314

30. Calcular $\underline{x+y}$ en:

$(1; 5); (4; 10); (7; 17); (10; 26); (x; y)$

(a) 48
(b) 54
(c) 50
(d) 52
(e) 46

31. Calcular el término que continúa en la sucesión:

$A; 4C^{2}; 9E^{4}; 16G^{8}; \ldots$

(a) 2511^{16}
(b) 251^{16}
(c) 251^{12}
(d) 321^{16}
(e) 41^{16}

32. Determinar la letra que sigue:

F; K; G; M; J; P; …

(a) L
(b) M
(c) N
(d) Ñ
(e) O

Determinar el número que sigue:

114; 57; 54; 27; 24; 12;...

(a) 3
(b) 6
(c) 9
(d) 12
(e) 2

Determinar el número que sigue:

1; 4; 9; 15; 23; 32;...

(a) 40
(b) 43
(c) 41
(d) 39
(e) 45

35. Dada la sucesión:

11; 18; 25; 32; 39;...

Hallar el producto de dígitos del segundo término que sea cuadrado perfecto.

(a) 16
(b) 12
(c) 4
(d) 9
(e) 8

36. ¿Cuál es el término que continúa en la siguiente sucesión?

1; 8; 27; ...

(a) 62
(b) 64
(c) 120
(d) 169
(e) N.A

37. ¿Cuál es el término 80 de la sucesión mostrada a continuación?

-1; 4; 9; 14; 19; ...

(a) 396
(b) 394
(c) 392
(d) 390
(e) 360

38. ¿Qué letra continúa en cada uno de los casos?

a; c; e; g; ...

(a) h
(b) i
(c) j
(d) k
(e) l

39. Hallar x:

180; 90; 100; 50; 60; 30; x

(a) 32
(b) 36
(c) 20
(d) 10
(e) 40

40. Hallar el término 20 de la sucesión dada:

2; 6; 12; 20; ...

(a) 400
(b) 320
(c) 420
(d) 360
(e) 180

41. ¿Qué número sigue en la siguiente sucesión?

3; 7; 11; 15; m; n; ...

(a) 27
(b) 25
(c) 28
(d) 36

42. ¿Cuál es el término que sigue?

a^8; a^4; a^{27}; a^9; a^{64}; ...

(a) a^{64}
(b) a^{16}
(c) a^{48}
(d) N.A

43. ¿Qué número sigue en la siguiente sucesión?

-5; -10; 20; 40; -80; ...

(a) 120
(b) 160
(c) -160
(d) 180
(e) -160

44. Hallar $x + y$ en:

3; 7; x; 8; 7; 9; y; 10

(a) 12
(b) 13
(c) 14
(d) 15
(e) N.A

45. Hallar los términos que continúa en:
P; S; T; C; Q; ...; ...

(a) R; U
(b) S; V
(c) T; W
(d) S; S
(e) S; O

46. ¿Qué término continúa?
U; L; D; M; T; M; C; ...

(a) J; C
(b) D; J
(c) N; V
(d) L; D
(e) M; U

47. ¿Qué letra continúa?

A; A; B; C; E; H; M; ...
(a) P
(b) Q
(c) R
(d) S
(e) T

48. ¿Qué número continúa?
2; 3; 5; 7; 11; 13; ...
(a) 17
(b) 15
(c) 19
(d) 14
(e) 20

49. ¿Qué letra continúa?

A; I; J; Q; R; ...

(a) W
(b) Z
(c) A
(d) Y
(e) X

50. ¿Qué letra continúa?

A; I; J; Q; R;...

(a) W
(b) Z
(c) A
(d) Y
(e) X

51. Hallar el término que continúa en:

1; 2/3; 1; 10/7; ...

(a) 17/9
(b) 21/11
(c) 9/11
(d) 19/11
(e) 19/13

52. ¿Qué número sigue?:

1; 8; 16; 25; 35; 46; ...

(a) 49
(b) 52
(c) 58
(d) 60
(e) 62

53. ¿Qué número sigue?:
7; 9; 27; 54; 57; ...

(a) 59
(b) 60
(c) 61
(d) 62
(e) 63

54. ¿Qué número sigue?:
6; 22; 5554; 118; 246; ...

(a) 498
(b) 505
(c) 336
(d) 502
(e) 600

55. ¿Qué número sigue?:
2; 3; 5; 10; 21; 42; ...

(a) 68
(b) 76
(c) 89
(d) 80
(e) 78

56. ¿Qué número sigue?:
2; 3; 5; 10; 21; 42; ...

(a) 20
(b) 30
(c) 40
(d) 50
(e) 60

57. ¿Qué número continúa?:

$5^{13}, 15^{23}, 25^{33}, 35^{43}$; ...

(a) 38^{45}
(b) 38^{40}
(c) 45^{45}
(d) 45^{53}
(e) 53^{45}

58. ¿Qué número sigue?:

9; 16; 23; 30; 37; ...

(a) 35
(b) 24
(c) 46
(d) 44
(e) 39

Calcular x+y en:

(1; 5); (4; 10); (7; 17); (10; 26); (x; y)

(a) 48
(b) 54
(c) 50
(d) 52
(e) 46

60. Hallar "x" en:

-50; 0; 100; 190; 250; 300; x

(a) 400
(b) 408
(c) 410
(d) 420
(e) 450

61. ¿Qué número sigue?:

-15; -9; -1; 9; ...

(a) 18
(b) 15
(c) 36
(d) 21
(e) 23

62. Hallar x+:

8; 16; 17; 3; 35; x; y

(a) 140
(b) 141
(c) 139
(d) 151
(e) 142

63. Halla el valor de x en:

22; 7; 0; 0; 12; x

(a) 20
(b) 19
(c) 18
(d) 15
(e) 17

64. ¿Qué letra continúa?:

A; D; F; G; J; L; ...

(a) L
(b) M
(c) K
(d) N
(e) Q

65. ¿Qué letra continúa?:

Y; W; S; N; ...

(a) Y
(b) C
(c) Q
(d) F
(e) J

66. Indicar el número que continúa:

5; 7; 11; 19; ...

(a) 37
(b) 3520
(c) 1
(d) 27
(e) 29
(f) 31

67. Indicar el número que continúa:

1; 3; 5; 15; 17; 51; ...

(a) 54
(b) 55
(c) 56
(d) 53
(e) 63

68. Indicar el número que continúa:

1; 2,3; 5; 8; 13; ...

(a) 20
(b) 19
(c) 21
(d) 24
(e) 32

69. Indicar el número que continúa:

2; 6; 18; 54; ...

(a) 108
(b) 216
(c) 246
(d) 162
(e) 81

70. Qué número sigue en:

5; 23; 59; ...

(a) 131
(b) 180
(c) 139
(d) 179
(e) 159

71. Hallar el par de letras que continúa:

CF; FK; JO; NT; ...

(a) TX
(b) UZ
(c) TY
(d) SY
(e) UE

72. ¿Qué número sigue en: ?

9; 8; 7; 13; 12; 11; 17; 16; 15; ...

(a) 15
(b) 16
(c) 19
(d) 20
(e) 21

73. Hallar el siguiente término:
$3x-2y^5;-2x^2+3y^4;-7x^3+ 8y^3;$ ...

(a) $10x^4+12y^3$
(b) $-12x^4+13y^2$
(c) $2x^4+10y^3$
(d) $-9x^4+13y$
(e) N.A.

74. Hallar x en la siguiente sucesión:
55; 28; 19; 16; x

(a) 13
(b) 14
(c) 15
(d) 12
(e) 11

75. Hallar el término que sigue en la sucesión:
2; 7; 22; 53; 106; 187; ...

(a) 282
(b) 457
(c) 302
(d) 250
(e) 182

PARTE 2
RAZONAMIENTO ABSTRACTO

SECUENCIAS GRÁFICAS

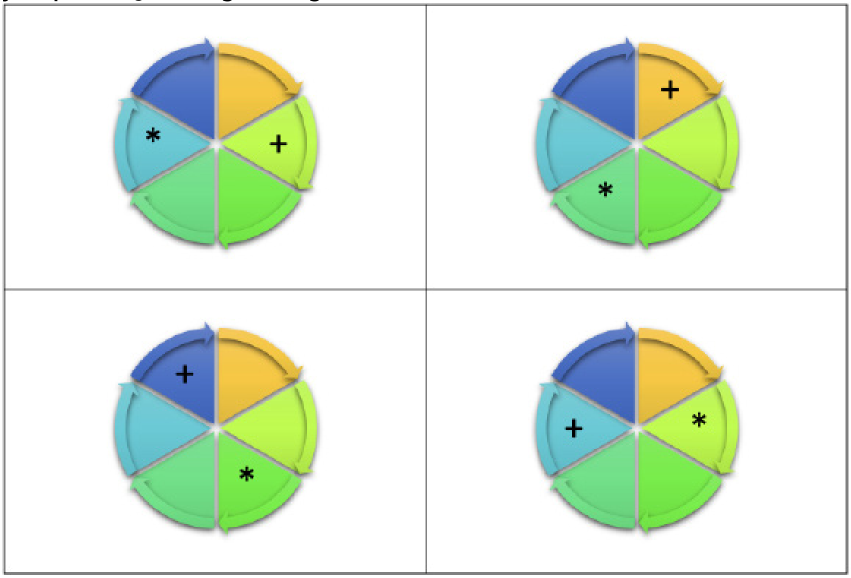
Las **secuencias gráficas** son sucesiones cuyos elementos (términos) son figuras u objetos que tienen una propiedad o regla de formación también llamado patrón. Este patrón lo obtendremos ya sea por giros, cantidad de partes, posiciones, formas, superposiciones, adición de figuras, etc.

Al igual que en las secuencias numéricas, también distinguiremos los términos por el lugar que ocupan, el primero, el segundo, el tercero, etc. Una diferencia notable está en que en las secuencias numéricas se requiere un conocimiento matemático previo elemental o avanzado, en cambio en las gráficas todo se reduce a la observación, un breve análisis y sobre todo al sentido común.

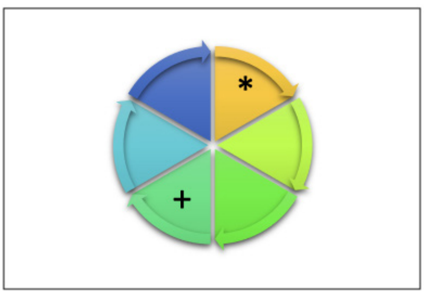
También hay que tener en cuenta que, las figuras crean su patrón de funcionamiento cambiando posiciones o formas. Cuando aparecen varias figuras en un cuadro, estas pueden seguir su propio movimiento o funcionar dependiendo del cambio de otra figura, cada secuencia sigue su "propio" modelo.

A continuación, presentamos algunos ejemplos de secuencias gráficas.

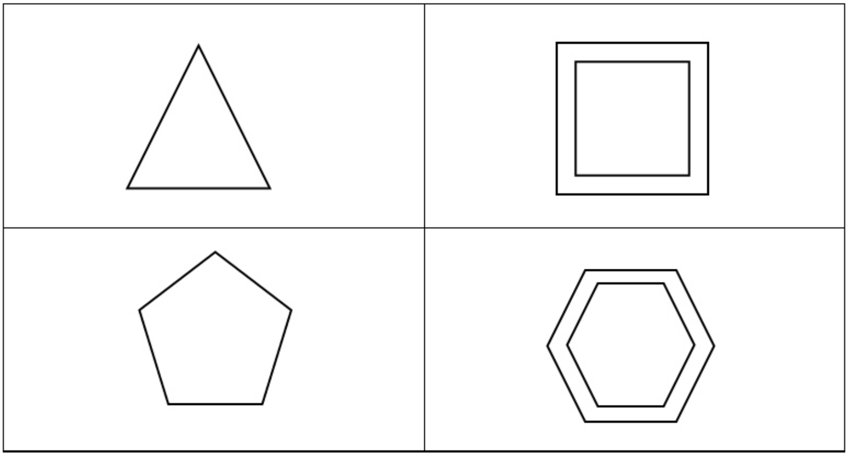
Ejemplo 1: ¿Qué figura sigue?



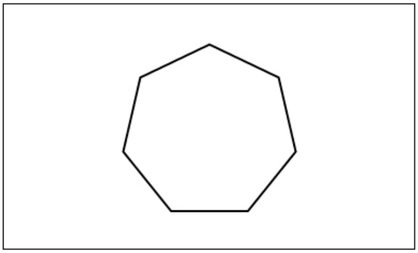
Observando el movimiento del asterisco (*) y del más (+), vemos que se mueven una posición cada vez y en sentido antihorario; por tanto es de esperar que la siguiente figura será:



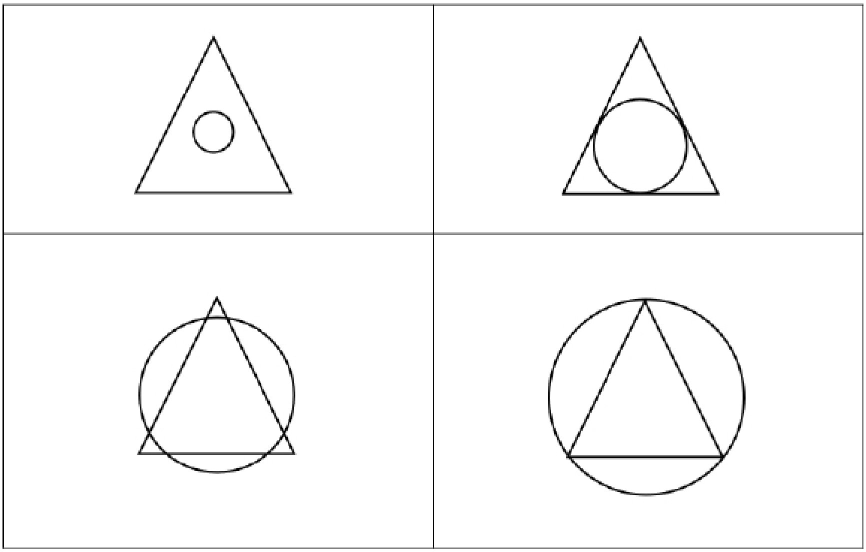
Ejemplo 2: ¿Qué figura sigue?



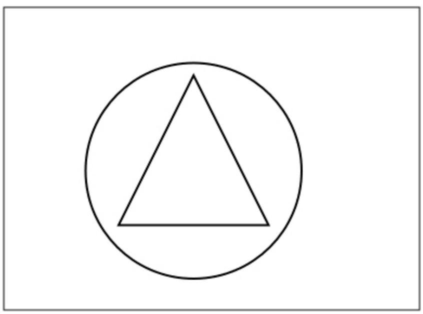
Observando la secuencia, se infiere que, por el número de lados de los polígonos, la figura siguiente debe ser un heptágono sin doble línea, así:



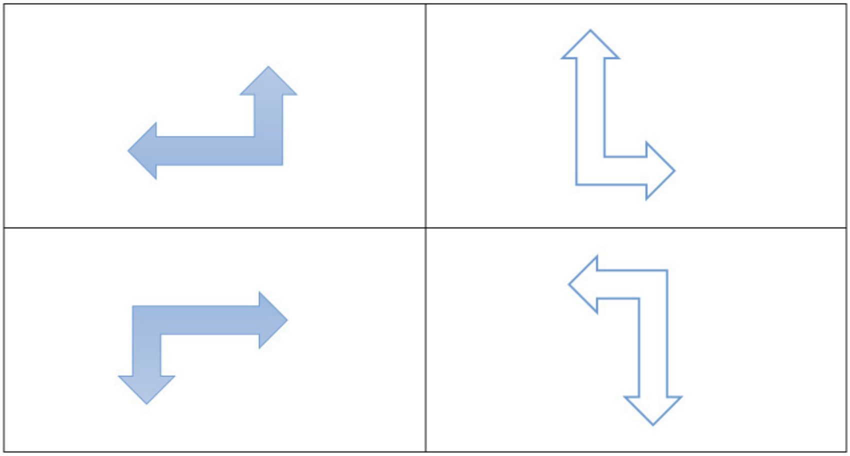
Ejemplo 3: ¿Qué figura sigue?



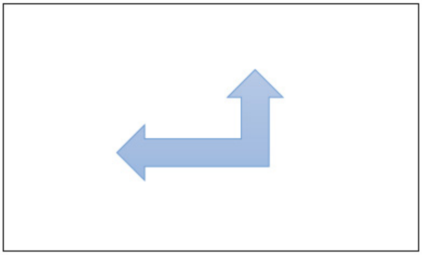
Observando la secuencia, se infiere que el círculo central es cada vez más grande, por ende, la figura siguiente debe ser así:



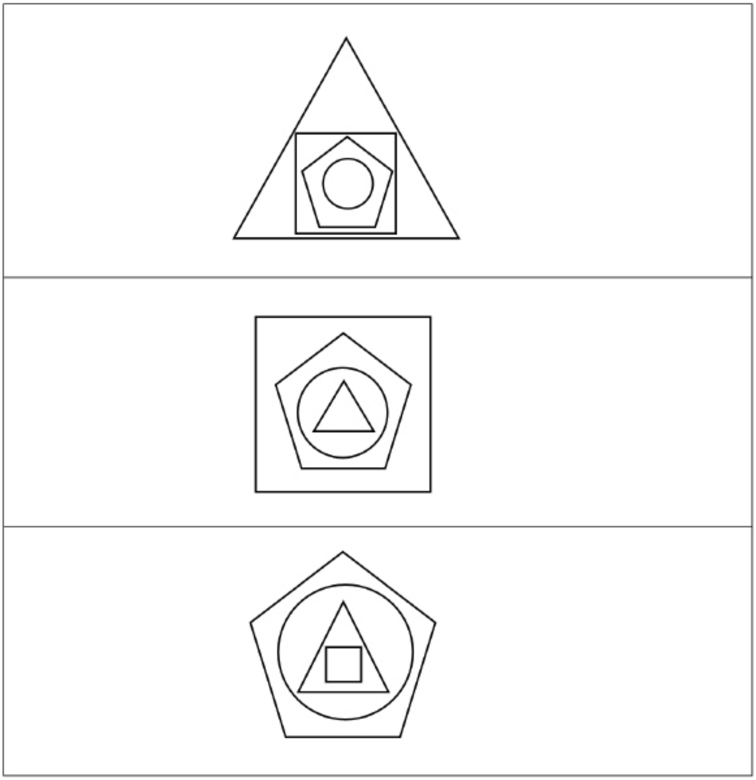
Ejemplo 4: ¿Qué figura sigue?



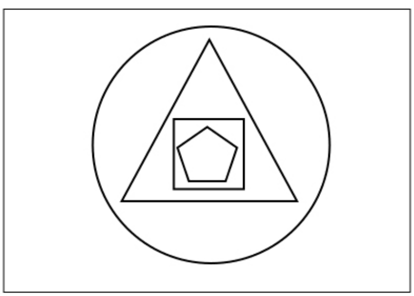
Observando el giro horario de la fecha y el relleno, se deduce que la figura siguiente debe ser así:



Ejemplo 5: ¿Qué figura sigue?

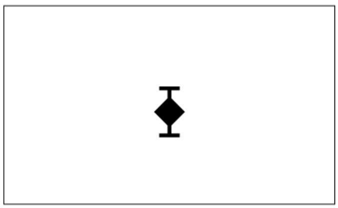


Observando el avance de las figuras de adentro hacia afuera, se deduce que la figura siguiente debe ser así:



Ejemplo 6: ¿Qué figura sigue?

Observando la forma y el relleno de la figura, se deduce que la figura siguiente debe ser así:



Ejemplo 7: ¿Qué figura sigue?

→	↗
↑	↖
←	

Observando el giro antihorario de la flecha, se deduce que la figura siguiente debe quedar así:

↙

Ejemplo 8: ¿Qué figura sigue?

≔	≒
≕	≓

Observando el movimiento de los dos puntos, se deduce que la figura siguiente debe ser así:

≔

Ejemplo 9:

	**Es a**	
	Como	
	**Es a**	

Nótese el intercambio del "menor que" por un "mayor que", y el número de paréntesis (1 a 2); se deduce que la figura siguiente debe ser así:

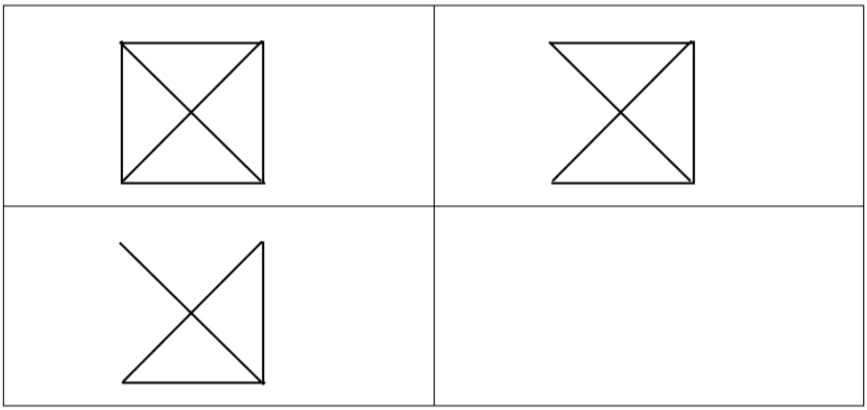
Sugerencias para para resolver ejercicios de Secuencias Gráficas

1. Observe detenidamente lo que contienen las casillas, cuadros o escenarios de la secuencia.

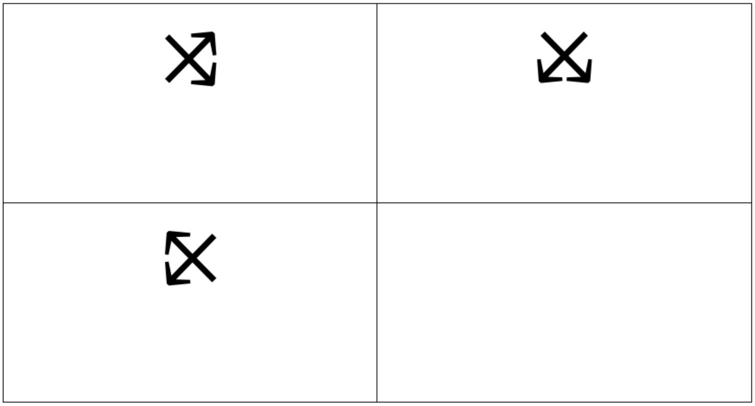
2. Examine atentamente las formas, los giros, los colores, los tamaños, etc. Determine la naturaleza del cambio que se observa, establezca las semejanzas y diferencias entre las figuras y defina la relación analógica existente.
3. Determine qué características debe tener la figura que falta para completar la analogía y proponga la que guarde la misma relación.

EJERCICIOS PROPUESTOS

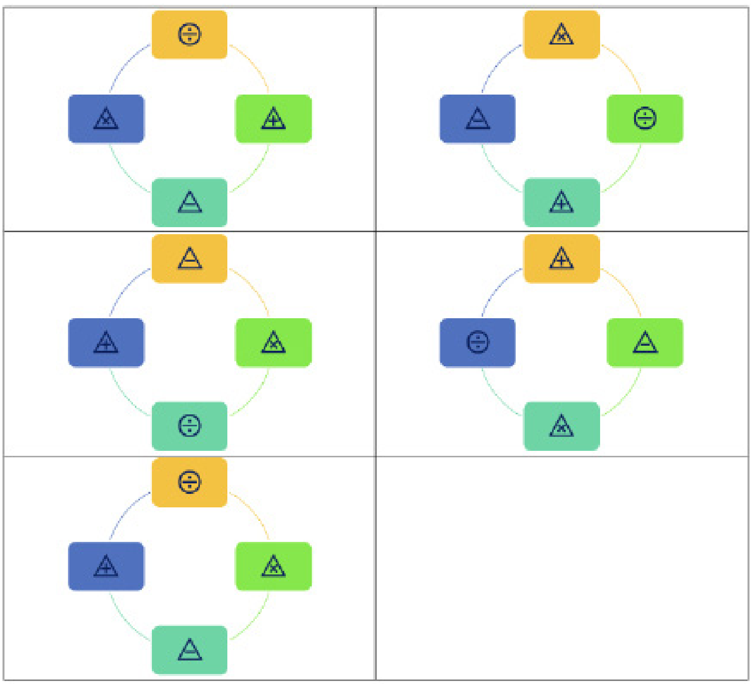
1. ¿Qué figura sigue?



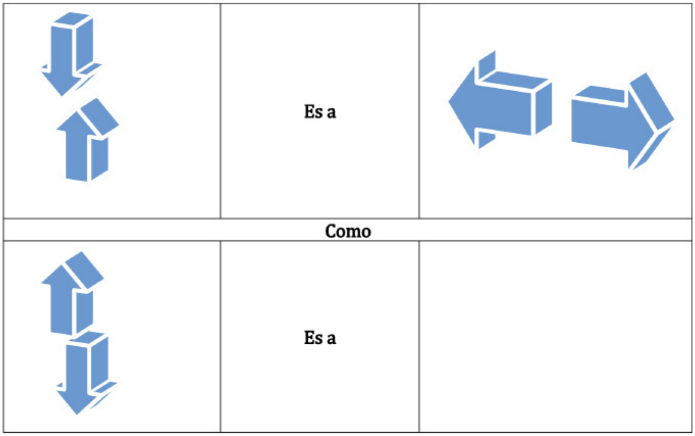
2. ¿Qué figura sigue?



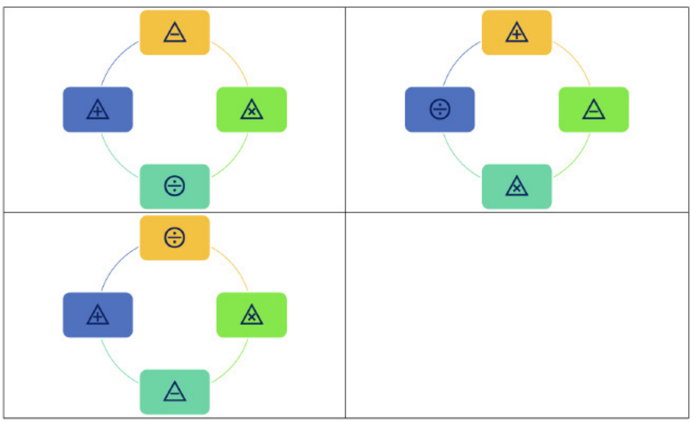
3. ¿Qué figura sigue?



4. ¿Qué figura sigue?



5. ¿Qué figura sigue?



PARTE 3
ARITMÉTICA

La Aritmética es una parte de la Matemática que estudia los números (números naturales, enteros, fraccionarios, decimales, etc.) y sus operaciones básicas (adición, resta, multiplicación, división).

Al igual que en otras áreas de la Matemática, como el Álgebra o la Geometría, la Aritmética ha ido desarrollándose conjuntamente con el avance de las ciencias. En la Antigua Grecia es donde la Aritmética se desarrolla de manera formal, es decir, con rigor matemático. En la actualidad, la Aritmética Elemental, está presente en la enseñanza de la Matemática Básica, especialmente, en los Cálculos Numéricos, de adición, resta, multiplicación y división aplicados a números (números naturales, números enteros, números fraccionarios, números decimales, etc.). La Aritmética es una materia clave para el estudio de las demás áreas, ya que se inicia con los conceptos básicos, para dar paso al estudio los números enteros y racionales con sus respectivas operaciones, teoría de números, potenciación y radicación, notación científica, sistemas de numeración.

CLASIFICACIÓN

El hombre ha tenido la necesidad de contar desde su aparición sobre la Tierra hasta nuestros días, para hacerlo se auxilió de los números 1,2,3,4,5, ..., a los que llamó números naturales. Números que construyó con base en el principio de adición; sin embargo, pronto se dio cuenta de que este principio no aplicaba para aquellas situaciones en las que necesitaba descontar. Es entonces que creó los números negativos, así como el elemento neutro (cero), que con los números naturales forman el conjunto de los números enteros, los cuales son:

...-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5 ...

Asimismo, se percató que al tomar sólo una parte de un número surgían los números racionales, que se expresan como el cociente de dos números enteros, con el divisor distinto de cero, por ejemplo:

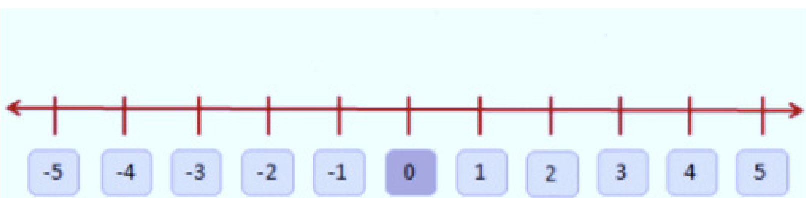
... ,-5/2; 3/4 ; 8/2 ; 0/3 ;-9/17; 0,235; 0,2666666 ...; 8/2 ; 0/3 ; ...

Y así, se llama número racional a todo número que puede representarse como el cociente de dos enteros, con denominador distinto de cero. Los números decimales (decimal exacto, periódico puro y periódico mixto) son números racionales.

Un número es irracional si posee infinitas cifras decimales no periódicas, por tanto, no se pueden expresar en forma de fracción, en otras palabras, aquellos números que no es posible expresar como el cociente de dos números enteros, se conocen como números irracionales. Entre ellos tenemos:

$\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{83}$, π(=3,141592654...) *e* (=2,718281828...)

Al unir los números anteriores (racionales e irracionales) se forman los números reales, los cuales se representan en la recta numérica.



NÚMEROS REALES

El conjunto de los números naturales está formado por:

N= {1,2,3,4,5,6,7,8,9,...}

Los números enteros son del tipo:

E = {...-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5 ...}

Se llama número racional a todo número que puede representarse como el cociente de dos enteros con denominador distinto de cero.

Q={a/b:a $\in$ E y b $\in$ E,b≠0}

...,-5/2; 3/4 ; 8/2 ; 0/3 ;-9/17; 0,235; 0,2666666; 8/2 ; 0/3 ;

Los números decimales (decimal exacto, periódico puro y periódico mixto) son números racionales, pero los números decimales ilimitados no.

Un número es irracional si posee infinitas cifras decimales no periódicas, por tanto, no se pueden expresar en forma de fracción.

El conjunto formado por los números racionales e irracionales es el conjunto de los números reales, se designa por R.

LECTURA Y ESCRITURA

Un número en el sistema decimal se escribe o se lee con base en la siguiente tabla:

Clases	Billones			miles de millón			millón			Miles					
Orden ⇒	centenas de billón	decenas de billón	unidades de billón	centenas de miles de millón	decenas de miles de millón	unidades de miles de millón	centenas de millón	decenas de millón	unidades de millón	centenas de mil	decenas de mil	unidades de mil	centenas	decenas	unidades
De tal manera, que el número 9782464589526 al clasificarlo se obtiene:															
			9	7	8	2	4	6	4	5	8	9	5	2	6
Se lee como:			9 billones		782 mil			464 millones			589 mil			526.	

Ejemplo 1: Leer los números.

Escritura	Lectura
73	Setenta y tres
428	Cuatrocientos veintiocho
34 673	Treinta y cuatro mil seis cientos setenta y tres
37 248 325	Treinta y siete millones doscientos cuarenta y ocho mil trecientos veinticinco
411 639 205 483 269	Cuatrocientos once billones seiscientos treinta y nueve mil doscientos cinco millones cuatrocientos ochenta y tres mil doscientos sesenta y nueve

Ejemplo 2: Expresa numéricamente.

Lectura	Escritura
Cuatrocientos ochenta y siete	487
Siete mil cuatrocientos treinta y cinco	7 435
Doscientos noventa y nueve millones setecientos ocho	299 000 708

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

Debido a que el estudiante tendrá numerosas ocasiones para referirse a las propiedades del sistema de los números reales, se presentarán en esta sección. Al establecer las propiedades siguientes, las letras a,b,c y d representarán números reales.

PROPIEDADES DE LA IGUALDAD

I-1 (Propiedad Reflexiva) $a=a$
I-2 (Propiedad Simétrica) $a=b \rightarrow b=a$
I-3 (Propiedad Transitiva) $(a=b) \wedge (b=c) \rightarrow a=c$
I-4 (Propiedad de la Adición) $(a=b) \wedge (c=d) \rightarrow a+c=b+d$
I-5 (Propiedad de la Sustracción) $(a=b) \wedge (c=d) \rightarrow a-c=b-d$
I-6 (Propiedad de la Multiplicación) $(a=b) \wedge (c=d) \rightarrow a\cdot c=b\cdot d$
I-7 (Propiedad de la División) $(a=b) \wedge (c=d\neq 0) \rightarrow (a)/c=(b)/d$
I-8 (Propiedad de la Sustitución) Cualquier expresión puede reemplazarse por una expresión equivalente en una igualdad, sin cambiar el valor de verdad de la ecuación.

PROPIEDADES DE ORDEN

O-1 (Propiedad de tricotomía) Para todo par de números reales, a y b, es cierta una y sólo una de las proposiciones siguientes: $a<b, a=b, a>b$

O-2 (Propiedad de la Adición) $(a<b) \wedge (c\leq d) \rightarrow a+c<b+d$

O-3 (Propiedad de la Sustracción) $(a<b) \rightarrow a-c<b-c$

O-4 (Propiedad de la Multiplicación) $(a<b) \wedge (c>0) \rightarrow a\cdot c<b\cdot c$

$(a<b) \wedge (c<0) \rightarrow a\cdot c>b\cdot c$

O-5 (Propiedad de la División) $(a<b) \wedge (c>0) \rightarrow a/c<b/c$

$(a<b) \wedge (c<0) \rightarrow a/c>b/c$

O-6 (Propiedad Transitiva) $(a<b) \wedge (b<c) \rightarrow a<c$

O-7 (Propiedad de Partición) $(c=a+b) \wedge (b>0) \rightarrow c>a$

O-8 (Propiedad de Sustitución) Cualquier expresión puede reemplazarse por una expresión equivalente en una desigualdad, sin cambiar el valor de verdad de la desigualdad.

PROPIEDADES DE CAMPO

Operaciones de Adición

C-1 (Propiedad de Cerradura) $a+b$ es un número real

C-2 (Propiedad Asociativa) $a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c)$

C-3 (Propiedad Conmutativa) $a+b=b+a$

C-4 (Propiedad Aditiva del Cero) Existe un número real 0, el elemento neutral aditivo, tal que $a+0=0+a=a$

C-5 (Propiedad del Inverso Aditivo) Para todo número real a, existe un número real (-a), el inverso aditivo de a, tal que $a+(-a)=(-a)+a=0$

Operaciones de Multiplicación

C-6 (Propiedad de Cerradura) $a\cdot b$ es un número real

C-7 (Propiedad Asociativa) $a\cdot b\cdot c=(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

C-8 (Propiedad Conmutativa) $a\cdot b=b\cdot a$

C-9 (Propiedad Multiplicativa del Uno) Existe un número real 1, el elemento neutral multiplicativo, tal que $a\cdot 1=1\cdot a=a$

C-10 (Propiedad del Inverso Multiplicativo) Para todo número real a $(a\neq 0)$, existe un número real (1/a), el inverso multiplicativo de a, tal que

$$a\cdot(1/a)=(1/a)\cdot a=1$$

C-11 (Propiedad Distributiva) a·(b+c)=a·b+a·c

Ejemplo: Compare los siguientes números y coloque los símbolos <,>o=, según corresponda.

Números	Relación de orden
27 y 31	27<31
5397 y	5397>-9865
y	-435<-345
y	121/11=55/5
y 0	121/11=55/5
y	34/37>28/31
y	-37/39<-28/33

VALOR ABSOLUTO

Para cualquier número real a,

$$|\boldsymbol{a}| = \begin{cases} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{si\ a\ es\ positiva\ o\ cero} \\ -\boldsymbol{a} & \boldsymbol{si\ a\ es\ negativa} \end{cases}$$

Encuentre el valor absoluto de los siguientes números.

Números	Valor absoluto
-24	|-24|=24
53	|53|=53
-23/87	|-23/87|=23/87
0,043	|0,043|=0,043
0	|0|=0
-25	|-25|=25
-π	|-π|=π

Ejemplo: El valor de $|-5+3|(-5+3)-(-4)$ es:

(a) -8
(b) 0
(c) 1
(d) 8
(e) 16

Solución: $|-5+3|(-5+3)-(-4)=|-2|(-2)+4=2(-2)+4=-4+4=0$
Por lo tanto, (b).

Operaciones con Fracciones

Regla 1: Denominador común

Si dos fracciones tienen el mismo denominador, su suma (diferencia) se obtiene sumando (restando) sus numeradores y colocando el resultado sobre el común denominador.

Regla 2: Denominadores diferentes

Para sumar (restar) dos fracciones de diferentes denominadores se reformulan como fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador. La suma (diferencia) se calcula después aplicando para ello la regla 1.

Regla 3: Multiplicación

El producto de dos o más fracciones se calcula al dividir el producto de sus numeradores entre el producto de sus denominadores. Es decir,

$$a/b \times c/d = ac/bd$$

Regla 4: División

El cociente de dos fracciones simples se puede determinar al invertir la fracción del divisor y efectuar la multiplicación por la fracción del dividendo. Esto es,

a/b÷c/d=ad/bc

Ejemplos

1. Realice los siguientes cálculos aritméticos.

El valor de la expresión (2+0,5)/(2-0,5) es:

(a) 5⁄2
(b) 3⁄5
(c) 15⁄4
(d) 5⁄3
(e) 3⁄2

Solución:

$$\frac{2+0{,}5}{2-0{,}5} = \frac{2+\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}} = \frac{5/2}{3/2} = 5/3$$

Entonces, (d).

2. Entre 1/2 y 2/3 se encuentra:

(a) 4/5
(b) 1/6
(c) 2/5
(d) 7/12
(e) 2/7

Solución:

$$\frac{1}{2} = 0{,}50000 \text{ y, } \frac{2}{3} = 0{,}66667$$

Ahora bien,

$\frac{4}{5} = 0{,}8$, $\frac{1}{6} = 0{,}16667$, $\frac{2}{5} = 0{,}40000$, $\frac{7}{12} = 0{,}58333$ y, $\frac{2}{7} = 0{,}28571$

Por lo tanto, observando, nos quedamos con la opción (d).

3.

$$\frac{3}{1-\frac{2}{1-\frac{1}{2}}} =$$

(a) 1
(b) -1
(c) 3⁄5
(d) 12⁄5

Solución:

$$\frac{3}{1-\frac{2}{1-\frac{1}{2}}} = \frac{3}{1-\frac{2}{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{1-4} = \frac{3}{-3} = -1 \ldots$$

por lo tanto (b)

4.

$$\left(\frac{0{,}25+\frac{1}{2}-\frac{5}{8}}{\frac{\frac{1}{5}-\frac{3}{4}}{1/16}}\right)\left(\frac{2}{5}+1{,}2\right) =$$

(a) -1/44
(b) -31/176
(c) -1/59
(d) 1/44

Solución:

$$\left(\frac{0{,}25+\frac{1}{2}-\frac{5}{8}}{\frac{\frac{1}{5}-\frac{3}{4}}{1/16}}\right)\left(\frac{2}{5}+1{,}2\right)=\left(\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{5}{8}}{\frac{-\frac{11}{20}}{1/16}}\right)\left(\frac{2}{5}+\frac{6}{5}\right)=\left(\frac{\frac{1}{8}}{-\frac{44}{5}}\right)\left(\frac{8}{5}\right)=\left(-\frac{5}{8\times 44}\right)\left(\frac{8}{5}\right)=-\frac{1}{44}\cdots$$

entonces (a).

5. Halle el valor de: $\frac{c}{6}[(X+x)(Y+y)+XY+xy]$

Para: c=3/2; X=2; x=4; Y=5; y=6

(a) 1/100
(b) 4/25
(c) 7/45
(d) 25

Solución:

$$\frac{c}{6}[(X+x)(Y+y)+XY+xy]=\frac{3/2}{6}[(2+4)(5+6)+2\times 5+4\times 6]=$$
$$\frac{1}{4}[(6)(11)+10+24]=\frac{1}{4}[66+10+24]=\frac{1}{4}[100]=25\ \cdots$$

por tanto, (d).

6. Calcule:

$$\frac{\left(140\frac{7}{30}-138\frac{5}{12}\right)\div 18\frac{1}{6}}{0{,}002}$$

(a) 5
(b) 50
(c) 500
(d) 5000

Solución:

$$\frac{\left(140\frac{7}{30}-138\frac{5}{12}\right)\div 18\frac{1}{6}}{0{,}002}=\frac{\left(\frac{109}{60}\right)\div\frac{109}{6}}{2/1000}=\frac{1/10}{1/500}=50\cdots$$

por tanto (b).

7. Halle el valor de:

$$\frac{a+b-c}{2}-\frac{b-a+c}{3}+\frac{2a-2c}{4}$$

Si a=1/5 b=2/3 c=1/4

(a) 29/72
(b) 172/360
(c)-127/360
(d) 127/360

Solución:

$$\frac{a+b-c}{2}-\frac{b-a+c}{3}+\frac{2a-2c}{4}=\frac{\frac{1}{5}+\frac{2}{3}-\frac{1}{4}}{2}-\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}}{3}+\frac{2\left(\frac{1}{5}\right)-2\left(\frac{1}{4}\right)}{4}$$

$$=\frac{\frac{37}{60}}{2}-\frac{\frac{43}{60}}{3}+\frac{-\frac{1}{10}}{4}=\frac{37}{60}-\frac{43}{180}-\frac{1}{40}=\frac{127}{360}$$

Por tanto (d).

POTENCIACIÓN

Definiciones

1. $a^n = \overbrace{a \times a \times a \cdots}^{n\ veces}$ donde a es la base y n es el exponente.
2. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Propiedades

1. $a^m a^n = a^{m+n}$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3. $a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$
4. $(a^m)^n = a^{m\times n}$
5. $(a \times b)^m = a^m \times b^m$
6. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

Ejemplos

1. Calcular: $(2^4\times3^{-6}\times5^2)^{-1/2}$

Solución:
$(2^4\times3^{-6}\times5^2)=-1/2=2^{-2}\times3^3\times5^{-1}=1/4\times27\times1/5=27/20$

2. Calcular: $(3^{-2}\times5^2)^3\ (3^3\times5^{-3}\times7)^2$

Solución:
$(3^{-2})\times5^2)^3(3^3\times5^{-3}\times7)^2=3^{-6}\times5^6\times3^6\times5^{-6}\times7^2=49$

3. Calcular:

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^2\right]^2$$

Solución:

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^2\right]^2=\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{3}{5}\right)^4=\frac{1}{16}\times\frac{81}{625}=\frac{81}{10000}$$

4. Calcular:

$$\left(\frac{7^{-1}}{2^{-1}+3^{-1}+6^{-1}}\right)^{-2}$$

Solución:

$$\left(\frac{7^{-1}}{2^{-1}+3^{-1}+6^{-1}}\right)^{-2}=\left(\frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}\right)^{-2}=\left(\frac{\frac{1}{7}}{1}\right)^{-2}=7^2=49$$

5. Calcular

$\left(1-\frac{x}{X}+\frac{X^2}{x^2}\right)\left(\frac{mn}{3}\right)$ Para: x=1 X=2 m=3 n=4

a) 18
b) 36
c) 14
d) 27

Solución:

$$\left(1-\frac{x}{X}+\frac{X^2}{x^2}\right)\left(\frac{mn}{3}\right)=\left(1-\frac{1}{2}+\frac{2^2}{1^2}\right)\left(\frac{3\times 4}{3}\right)=\left(1-\frac{1}{2}+4\right)(4)=\left(\frac{9}{2}\right)(4)=18$$

Y así: (a).

Notación Científica

La notación científica se utiliza para expresar cantidades en función de potencias de 10 y por lo regular se usa para cantidades muy grandes o muy pequeñas.

$$Formato: \quad a \times 10^n \ siendo \begin{cases} 1 \leq a < 10 \\ n \ un \ entero \end{cases}$$

Ejemplos:
Los siguientes números están en notación científica

1. $2\,345\,000\,000 = 2{,}345 \times 10^9$
2. $7\,486\,193 = 7{,}49 \times 10^6$
3. $0{,}000\,000\,000\,583 = 5{,}83 \times 10^{-10}$
4. $0{,}000\,624\,387 = 6{,}24 \times 10^{-4}$
5. $3{,}45 \times 10^8 = 345\,000\,000$
6. $3{,}4589876 \times 10^{21} = 3\,458\,987\,600\,000\,000\,000\,000$
7. $3{,}45 \times 10^{-8} = 0{,}0000000345$
8. $9{,}67851 \times 10^{-17} = 0{,}0000000000000000967851$

Las siguientes cantidades no están en notación científica.

9. $23{,}7 \times 10^{-3}$
10. $764{,}09 \times 10^{16}$

RADICACIÓN

Definición

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Propiedades

1. $\sqrt[n]{a \times b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Ejemplos:

1. Calcular:

$$\sqrt[3]{2^6 \times 5^6 \times 3^3}$$

Solución:

$$\sqrt[3]{2^6 \times 5^6 \times 3^3} = 2^2 \times 5^2 \times 3 = 4 \times 25 \times 3 = 300$$

2. Calcular:

$$\left(\sqrt{\frac{27}{125}}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{9}{25}}\right)$$

Solución:

$$\left(\sqrt{\frac{27}{125}}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{9}{25}}\right)=\left(\frac{3^3}{5^3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{3^2}{5^2}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{3^{\frac{3}{2}}\times 3^{\frac{2}{3}}}{5^{\frac{3}{2}}\times 5^{\frac{2}{3}}}=\frac{3^{2\frac{1}{6}}}{5^{2\frac{1}{6}}}=\frac{3^2}{5^2}\sqrt[6]{\frac{3}{5}}=\frac{9}{25}\sqrt[6]{\frac{3}{5}}$$

3. Calcular:

$$\left(\frac{\sqrt{5}\times\sqrt[3]{5}}{5^2}\right)\left(\sqrt{\frac{5^{-1}\times\sqrt{5}}{\sqrt[4]{5}}}\right)$$

Solución:

$$\left(\frac{\sqrt{5}\times\sqrt[3]{5}}{5^2}\right)\left(\sqrt{\frac{5^{-1}\times\sqrt{5}}{\sqrt[4]{5}}}\right)=\left(\frac{5^{\frac{1}{2}}\times 5^{\frac{1}{3}}}{5^2}\right)\left(\frac{5^{-\frac{1}{2}}\times 5^{\frac{1}{4}}}{5^{\frac{1}{8}}}\right)=5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-2-\frac{1}{8}}=5^{-1\frac{13}{24}}=\frac{1}{5\sqrt[24]{5^{13}}}$$

4. Calcular:

$$\sqrt{2^{-6}+6^{-2}}$$

Solución:

$$\sqrt{2^{-6}+6^{-2}}=\sqrt{\frac{1}{2^6}+\frac{1}{6^2}}=\sqrt{\frac{1}{64}+\frac{1}{36}}=\sqrt{\frac{25}{576}}=\frac{5}{24}$$

5. Calcular:

$$\frac{1}{4}\sqrt{192}-\frac{2}{5}\sqrt{75}+\frac{1}{7}\sqrt{147}$$

Solución:

$$\frac{1}{4}\sqrt{192}-\frac{2}{5}\sqrt{75}+\frac{1}{7}\sqrt{147}=\frac{1}{4}\sqrt{2^6\times 3}-\frac{2}{5}\sqrt{5^2\times 3}+\frac{1}{7}\sqrt{7^2\times 3}=$$

$$\frac{1}{4}\times 8\sqrt{3}-\frac{2}{5}\times 5\sqrt{3}+\frac{1}{7}\times 7\sqrt{3}=2\sqrt{3}-2\sqrt{3}+\sqrt{3}=\sqrt{3}$$

6. Calcular:

$$\frac{2}{5}\sqrt[3]{250}+\frac{3}{4}\sqrt[3]{128}-\frac{1}{3}\sqrt[3]{54}$$

Solución:

$$\frac{2}{5}\sqrt[3]{250}+\frac{3}{4}\sqrt[3]{128}-\frac{1}{3}\sqrt[3]{54}=\frac{2}{5}\sqrt[3]{5^3\times 2}+\frac{3}{4}\sqrt[3]{4^3\times 2}-\frac{1}{3}\sqrt[3]{3^3\times 2}=$$

$$\frac{2}{5}\times 5\sqrt[3]{2}+\frac{3}{4}\times 4\sqrt[3]{2}-\frac{1}{3}\times 3\sqrt[3]{2}$$

Jerarquía al realizar operaciones

El orden en el que se deben realizar las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potencia y raíz, así como signos de agrupación, es de vital importancia a la hora de resolver un problema de cálculo aritmético. De esta forma se garantiza que se obtendrá el resultado correcto.

Ejemplo 1: Halle el valor de: $(a^2-2ab+b^2)(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)$
Para: a=2/3 y b=1/6
Solución:

$$(a^2-2ab+b^2)(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)=$$

$$=\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2-2\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}\right)^2\right]\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3-3\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)+3\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^2-\left(\frac{1}{6}\right)^3\right]$$

$$=\left[\frac{4}{9}-\frac{2}{9}+\frac{1}{36}\right]\left[\frac{8}{27}-\frac{2}{9}+\frac{1}{18}-\frac{1}{216}\right]=\left[\frac{1}{4}\right]\left[\frac{1}{8}\right]=\frac{1}{32}$$

Ejemplo 2:

Halle el valor de: $2a[a^2+2b(5a-b)-b^2]+\frac{a^2}{3}-b$

Para: a=6 y b=20

Solución:

$$2a[a^2+2b(5a-b)-b^2]+\frac{a^2}{3}-b=2(6)[6^2+2(20)[5(6)-20]-20^2]+\frac{6^2}{3}-20$$
$$=2(6)[36+400-400]+12-20=432+12-20=424$$

Ejemplo 3: Halle el valore de:
a^5-5a^4 b+10a^3 b^2-10a^2 b^3+5ab^4-b^5

Solución:

$$a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$$
$$=3^5-5(3^4)(2)+10(3^3)(2^2)-10(3^2)(2^3)+5(3)(2^4)-(2^5)$$
$$=243-810+1080-720+240-32=1$$

Ejemplo 4: Halle el valor de:

$$\sqrt{3x^2+x+1}-\frac{14}{2x-3}+\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)\frac{x^2}{10}-\sqrt{7x^2-4x-11}$$

Para x=5
Solución:

$$\sqrt{3x^2+x+1}-\frac{14}{2x-3}+\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)\frac{x^2}{10}-\sqrt{7x^2-4x-11}$$

$$=\sqrt{3(5^2)+5+1}-\frac{14}{2(5)-3}+\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right)\frac{5^2}{10}-\sqrt{7(5^2)-4(5)-11}$$

$$=\sqrt{81}-2+(2)\frac{5}{2}-\sqrt{144}=9-2+5-12=0$$

Estrategias para la solución de problemas

Desde tiempos remotos el hombre ha tenido la necesidad de resolver problemas (de toda índole, como la supervivencia, como cazar a un animal para subsistir, como cruzar un río, como trasladarse de un lugar a otro o, un poco más avanzados, consigo mismo…). Para resolver un problema o efectuar una operación se obtuvo algo semejante a una receta de cocina, y se aplicó una y otra vez para resolver problemas similares.

George Polya, en su libro «How to solve it» propuso un método de cuatro pasos para la solución de problemas:

Método de cuatro pasos de Polya para la solución de problemas

Paso 1 Comprenda el problema:
Usted no puede resolver un problema sino entiende qué le pidieron calcular. Se debe leer y analizar el problema cuidadosamente. Tal vez sea necesario leerlo varias veces. Después de ello, pregúntese: "¿qué debo calcular?"
Paso 2 Elabore un plan:
Existen muchas maneras de enfrentar un problema. Elija un plan adecuado para el problema específico que está resolviendo.

Paso 3 Aplique el plan:
Una vez que sabe cómo enfocar el problema, ponga en práctica ese plan. Tal vez llegue a "un callejón sin salida" y encuentre obstáculos imprevistos, pero debe ser persistente.

Paso 4 Revise y verifique:
Revise su respuesta para ver que sea razonable. ¿Satisface las condiciones del problema? ¿Se han contestado todas las preguntas que plantea el problema? ¿Es posible resolver el problema de manera diferente y llegar a la misma respuesta?
Uso del Sentido Común

Sugerencias para la solución de problemas

Algunos problemas suponen una trampa. Parecen demasiado fáciles o quizás imposibles al principio porque tendemos a pasar por alto una situación evidente. Examine con cuidado el lenguaje de estos problemas. Y, por supuesto, nunca olvide usar el sentido común.

Ejercicios Propuestos

1. Se define $a\nabla b=a+b/2$, entonces el valor de $(2\nabla 3)^2$ es igual a:

(a) 3
(b) 9/4
(c) 9/16
(d) 4 9/4
(e) 25/36

2. Un capital de $2000 se triplica cada 5 años. Después de 15 años el capital será:

(a) $50000
(b) $30000
(c) $18000
(d) $6000
(e) $54000

3. Un hombre repartió su fortuna de la siguiente manera: la mitad para su esposa, la tercera parte para su hijo y el resto para obras benéficas. ¿Qué parte dio para obras benéficas?

(a) 1/6
(b) 1/3
(c) 4/5
(d) 2/3
(e) 3/2

4. El número que debemos sumar a la fracción para obtener la fracción es:

(a) 2⁄3
(b) 3⁄2
(c) -2⁄3
(d) -1⁄10
(e) 1⁄10

5. Una señora de 36 años tiene tres hijos, cuyas edades son: trece, once y ocho años. La edad de la madre igualará a la suma de las edades de los hijos dentro de:

(a) 1 año
(b) 2 años
(c) 3 años

(d) 4 años
(e) 5 años

6. Ana compró 5 discos compactos a 31 centavos cada uno, y 6 cajas a $1.80 la docena. Si pagó con un billete de $5.00, ¿cuánto recibió de cambio?

a) $2.55
b) $2.30
c) $3.20
d) $2.50
e) $3.45

7. Si 0.2, el valor de la expresión $x^2 + x + \frac{x}{2}$ es igual a:

a) 0.43
b) 0.25
c) 0.34
d) 0.70
e) 0.50

8. Si a=10 y b=8, entonces el valor de: $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ es:

a) 10
b) 8
c) 18
d) 21
e) 12

9. Si Pedro tiene más edad que Javier, María menos que Rosa, Pedro menos que María. Se puede decir que:

a) Pedro es mayor que Rosa.
b) Javier es menor que María.
c) Pedro y Rosa tienen la misma edad.
d) Javier es mayor que María.
e) Javier y María tienen la misma edad.

10. Pedro estudia más que Luis, Ernesto estudia menos que Pedro, y Ernesto estudia más que Luis. ¿Quién es el que menos estudia?

a) Pedro.
b) Luis.
c) Ernesto.
d) Luis y Pedro.
e) Pedro y Ernesto.

11. Los 9/2 de los 18 céntimos es:

a) 81
b) 8.1
c) 4
d) 0.81
e) 0.081

12. ¿Entre cuántos hijos se reparte una herencia de \$105000, si a cada uno le toca \$13000 y sobra \$27000?

a) 9 hijos.
b) 6 hijos.
c) 3 hijos.
d) 8 hijos.
e) 5 hijos.

13. En un hogar se consumen 12 panes cada día, de lunes a viernes. El sábado se consume 1/3 de lo que se consume de lunes a viernes, y el domingo 1/4 . ¿Cuánto cuesta cada pan si se gasta semanalmente \$9,50 en pan?

a) 5 centavos.
b) 6 centavos.
c) 7 centavos.
d) 8 centavos.
e) 10 centavos.

14. 5/5 . 5/10 . 5/15 . 5/20 . 5/25 es igual a:

a) 1/120
b) 1/60
c) 1/30
d) 1/6
e) 1/2

15. Se define $A \Delta B = A \cdot B$, entonces el valor de es:

a) 15/4
b) 60
c) 80
d) 120
e) 5/3

16. Samuel compra las mercancías siguientes: 18 esferográficos a 21 centavos cada uno y 25 manzanas a 17 centavos cada una. Si él paga con un billete de $10. ¿Cuánto recibe de cambio?

a) $2.17
b) $1.67
c) $2.57
d) $1.97
e) $2.07

17. Si $x = 4$ Y $y= -1$ y $z= 1/4 - 1/5$, entonces $(x + y)^2 -2x - 2y$ es:

a) -15
b) 1
c) 3
d) 11
e) 27

18. Si $x= 1/5 - 1/4$ Y $z= 1/4 - 1/5$ se puede afirmar que:

a) z es negativo.
b) x es mayor que z.
c) z es mayor que x.
d) x es positivo.
e) $z = x$

19. Si en una caja roja hay seis cajas amarillas y en cada caja amarilla hay tres azules, el número total de cajas es:

a) 18
b) 75
c) 19
d) 25
e) 54

20. Si de un pedazo de madera corto primero tres pedazos y luego de cada uno de ellos se cortan en tres partes iguales, y finalmente cada uno de estos en dos partes. El número total de cortes es:

a) 9
b) 8
c) 18
d) 15
e) 17

21. El tercio de un medio, dividido para la mitad de tres octavos, es igual a:

a) 9/8
b) 8/9
c) 2/3
d) 2
e) 3/2

22. Si se define la operación $A \oplus B = A^2 + B^2$, para todos los valores de A y B. Entonces el valor de $(A+B) \oplus (A+B)$ es igual a:

a) $(A + B)^2$
b) $2(A + B)^2$
c) $2A^2 + B^2$
d) $2(A^2 + B^2)$
e) $2(A + B)$

23. De una botella de vino de 1 litro de capacidad, se saca primero la mitad de su volumen y más tarde las dos terceras partes de lo que quedaba. ¿Qué parte del volumen inicial queda en la botella?

a) 1/3
b) 5/6
c) 2/3
d) 1/6
e)0

24. Un galón de lubricante del motor de una automóvil cuesta $10, dura para 3000 Km de recorrido. Si se recorren 150 Km semanales, ¿cuál es el costo mensual en lubricante? (un mes = 4 semanas)

a) $4
b) $2
c) $5
d) $3
e) $2.5

25. A una reunión asistieron 690 personas, por cada 13 hombres había 10 mujeres. ¿Cuántas mujeres asistieron?

a) 220
b) 390
c) 400
d) 300
e)330

26. En un edificio de 5 pisos hay 4 fachadas y en cada piso hay 8 ventanas hacia una de las 4 calles. ¿Cuántas ventanas hay en el edificio?

a) 640
b) 320
c) 480
d) 160
e) 120

27. En un viaje de 40 Km, Luis paga $ S/4 por cada Kilómetro de la mitad del viaje, y, $ por cada Kilómetro del resto del viaje. ¿Cuánto paga por todo el viaje?

a) $ 5/4S
b) $20 S
c) $25 S
d) $30 S
e) $40 S

28. ¿Cuál es el cuadrado de $\sqrt{1+\sqrt{1}}$?

a) 2 + $\sqrt{2}$
b) 3
c) 2
d) $\sqrt{2}$

29. El valor de $6-[3-(7-12)]$ es:

a) 5
b) -3
c) 2
d) -2

30. Para completar la igualdad (-5) + (-4)(-3) - (-1)(2)-?=-1¿qué valor se debe colocar en la incógnita?

a) 10
b) -8
c) 9
d) -9

31. Para completar la igualdad 15+(-25)-(-12)-3-?=-7-(-6) ¿qué valor se debe colocar en la incógnita?

a) -6
b) -1
c) 0
d) 1

32. Carlos estudia las 3/4 partes del año. Entonces Carlos no estudia:

a) 2 meses
b) 3 meses
c) 4 meses
d) 6 meses

33. El valor de $\frac{0.0375}{(0.75)(1.5)}$ es:

a) 3/10
b) 1/30
c) 3
d) 30

34. Una señora elabora una torta para su esposo y sus tres hijos. El primero se come la mitad, el segundo la tercera parte y el último la sexta parte. Entonces al padre le corresponde:

a) 0
b) 1/10
c) 1/6
d) 1/3

35. El cociente de dos fracciones es 10/3 si el dividendo es 8/9 el divisor es:

a) 10/3
b) 4/15
c) 3/10
d) 2/15

36. La fracción 5/8 equivale a:

a) 5.8
b) 0.58
c) 0.125
d) 0.625

37. Para que se cumpla $5/24 \div x/16 = 2/9$, X es:

a) 1/15
b) 5
c) 16/15
d) 25/128

38. Si al resultado de dividir 1/5 entre 1/3 se le resta 1/5 resulta:

a) 1/3
b) 1/10
c) 2/5
d) 2/15

39. El valor de $5/12 - 5/9 \div 10/3 + 2/3$ es:

a) 11/12
b) - 5/144
c) 5/9
d) 5/18

40. El valor de $(-1/2)^2 - (-1/2)^3$ es:

a) - 1/8
b) 1/8
c) 3/8
d) - 1/2

41. El número 2.5×10^3 en notación estándar es:

a) 2500
b) 25000
c) 0.00025
d) 0.0025

42. El número 0.00315 escrito en notación científica es:

a) 3.15×10^{-5}
b) 3.15×10^{-3}
c) 3.15×10^{3}
d) 3.15×10^{2}

43. La fracción equivalente a 0.181818... es:

a) 1/8
b) 18/100
c) 2/11
d) 9/50

44. La expresión 3 1/5 equivale a:

a) 4/5
b) 16/5
c) 15/5
d) 9/5

45. En una mueblería se compró 2 sillas a $299 cada una y una mesa a $140. Se pagó la sexta parte del costo total y el resto en 12 mensualidades iguales. La cantidad que se debe pagar cada mes es:

a) $10.25
b) $37.50
c) $42.75
d) $51.25

46. En una feria un ganadero ofrece un toro de regalo por cada 7 vacas que le compren. Si un comprador sale con 120 cabezas de ganado, el número de vacas que compró fue:

a) 96
b) 102
c) 103
d) 105

47. Un Km equivale a 1000 metros, 1 hora equivale a 3600 segundos. Entonces, 72 Km/h equivaldrán a:

a) 0.2 m/s
b) 2 m/s
c) 20m/s
d) 200m/s

48. El resultado de $1-\frac{4}{5}\div\frac{2}{15}+\frac{3}{8}\left(-\frac{2}{9}\right)-\frac{11}{12}$ es:

a) -6
b) 1/2
c) -227/12
d) -8/75

49. El resultado de $\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{6}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)\right]^2$ es:

a) 2
b) 1
c) -2
d) -1

50. 0.555555555555... es:

a) 5/10
b) 5/11
c) 5/9
d) 555/1000

51. 0.323232323232... es:

a) 3/10
b) 32/100
c) 32/99
d) 32/90

52. 0.146146146146... es:

a) 146/100
b) 146/1000
c) 146/900
d) 146/999

53. $\left[\frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}-1\right)+\left(\frac{6}{5}\right)^2\right]\div\frac{1}{2}+2\left(-\frac{1}{10}\right)^2$

a) 101/50
b) 44/25
c) 123/50
d) 5/2

54. $$\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-\frac{5}{8}}{\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\frac{1}{5}-\frac{3}{4}}}*\left(\frac{3}{2}+2\frac{1}{2}\right)$$

a) -22
b) -11
c) -55/4
d) -55/8

55. $$\frac{\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{5}-1}{\frac{5}{4}-1.375}}{\frac{4}{25}*0.4}$$

a) 25/2
b) -32/625
c) -25/2
d) 32/625

56. $$\frac{0.5-0.75}{5-\frac{\frac{4}{5}+3}{\frac{1}{2}}}*13$$

a) -5/4
b) 5/4
c) -65/62
d) 35

PROPORCIONALIDAD

Los siguientes conceptos de proporcionalidad se usan con frecuencia en la construcción de modelos matemáticos.

Una magnitud es cualquier propiedad que se puede medir numéricamente.

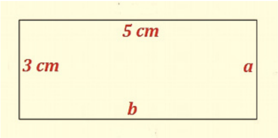
Ejemplos:

La longitud del lado un cuadrado.
La capacidad de una botella de agua.
El número de goles marcados en un partido.
El número de goles marcados por el equipo A.

Una razón es el cociente entre dos números o dos cantidades comparables entre sí, expresado como fracción. La razón entre a y b se escribe:

$$\frac{a\ (antecedente)}{b\ (consecuente)}$$

EJEMPLO La razón entre el ancho (**a**) y el largo (***b***)de un rectángulo es:



$$\frac{ancho}{largo} = \frac{a}{b} = \frac{3\ cm}{5\ cm} = \frac{3}{5}$$

Observación: No hay que confundir razón con fracción.

Si ***a***/***b*** es una fracción, entonces ***a*** y ***b*** son números enteros con ***b≠0,*** mientras que en la razón ***a***/***b***, los números ***a*** y ***b*** pueden ser decimales.

Una proporción es una igualdad entre dos razones.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\ \begin{cases} a\ y\ d\ son\ los\ extremos \\ b\ y\ c\ son\ los\ medios \end{cases}$$

Constante de proporcionalidad ***k***

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$$

Proporcionalidad Directa

Decir que ***y es directamente proporcional a x***, significa que, existe una constante ***k*** para la cual:

$$y=kx$$

La constante ***k***, llamada constante de proporcionalidad, está determinada si se conoce un conjunto de valores correspondientes de las variables ***x*** e ***y***.

Magnitudes directamente Proporcionales

Si dos magnitudes son tales que, a doble, triple… cantidad de la primera corresponde doble, triple…cantidad de la segunda, entonces se dice que esas magnitudes son directamente proporcionales.

Ejemplo: Un saco de papas pesa 20 kilogramos. ¿Cuánto pesan dos sacos? Un cargamento de papas pesa 520 kilogramos, ¿Cuántos sacos de 20 kilogramos cada uno se podrán conseguir?

Formamos la tabla:

	Número de sacos	1	2	3	...	26	...
	Peso en kilogramos	20	40	60	...	520	...

Para pasar de la 1ª fila a la 2ª basta multiplicar por 20, y, para pasar de la 2ª fila a la 1ª, dividimos por 20.
Observe que:

$$1/20=2/40=3/40= \cdots$$

Las magnitudes: «Número de sacos de papas» y «Peso en kilogramos» son directamente proporcionales. La constante de proporcionalidad para pasar de número de sacos a kilogramos es 20.

Importante: Como regla general, la constante de proporcionalidad entre dos magnitudes directamente proporcionales se obtiene, dividiendo valores de una magnitud para valores correspondientes de la otra magnitud. Este resultado se mantendrá constante (fijo).

Proporcionalidad Inversa

Decir que ***y es inversamente proporcional a x***, significa que, existe una constante k para la cual:

$$xy=k$$

La constante k, llamada constante de proporcionalidad, está determinada si se conoce un conjunto de valores correspondientes de las variables x e y.

Magnitudes Inversamente Proporcionales

Si dos magnitudes son tales que, a doble, triple... cantidad de la primera corresponde la mitad, la tercera parte...cantidad de la segunda,

entonces se puede afirmar que esas magnitudes son inversamente proporcionales.
EJEMPLO Si 3 hombres necesitan 24 días para hacer un trabajo, ¿cuántos días emplearán 18 hombres para realizar el mismo trabajo?

En este caso mientras más trabajadores tengamos, el trabajo tardará menos tiempo; por tanto, las magnitudes «número de trabajadores» y «tiempo» son inversamente proporcionales (también se dice que son indirectamente proporcionales).

Formamos la tabla:

	Trabajadores	3	6	9	...	18
	Días	24	12	8	...	x

Vemos que los productos **3×24=6×12=9×8=72.** Por lo tanto,

$$18 \times x = 72$$

O sea, *x*=72/18=4 es decir, que los 18 trabajadores tardarán 4 días en hacer el trabajo.

Nótese que la constante de proporcionalidad, 72, se obtiene multiplicando los valores de las magnitudes correspondientes entre sí.

Importante: Como regla general, la constante de proporcionalidad entre dos magnitudes inversamente proporcionales se obtiene multiplicando las magnitudes entre sí y el resultado se mantendrá constante.

Esta manera de trabajar con las proporciones nos permite adentrarnos en lo que llamaremos «regla de tres» y que nos permitirá resolver una gran cantidad de problemas matemáticos.

Método Práctico para resolver cualquier problema de Regla de Tres

Simple o Compuesta

1. Se escriben el supuesto y la pregunta.
2. Se compara cada una de las cantidades con la incógnita –suponiendo que las demás cantidades no varían- para ver si son directa o inversamente proporcionales con la incógnita.
3. A las cantidades que sean directamente proporcionales se les coloca debajo un signo «+» y encima un signo «-»; y, a las magnitudes que sean inversamente proporcionales se les coloca debajo un signo «-» y encima un signo «+». La cantidad desconocida irá siempre con signo «+».
4. El valor de la incógnita «*x*» será igual a:

$$x = \frac{\textit{Producto de todas las cantidades} \ll + \gg}{\textit{Producto de todas las cantidades} \ll - \gg}$$

Regla de Tres Simple y Directa

Ejemplo 1: En 50 litros de agua de mar hay 1300 gramos de sal. ¿Cuántos litros de agua de mar contendrán 5200 gramos de sal?

Como, a más cantidad de agua de mar habrá más cantidad de sal; cantidad de agua y cantidad de sal son directamente proporcionales.

	+	-
	**Cantidad de agua marina (litros)**	**Cantidad de sal (gramos)**
	50	**1300**
	x	**5200**
		+

Entonces:

$$x = \frac{50 \times 5200}{1300}$$

$$x = 200$$

Luego, con 200 litros de agua marina, conseguiremos 5200 gramos de sal.
Está forma de plantear y resolver problemas sobre proporciones se conoce con el nombre de regla de tres simple y directa.

Ejemplo 2: Un automóvil consume 5 litros de gasolina cada 100 km. Si quedan en el depósito 6 litros, ¿cuántos kilómetros podrá recorrer el automóvil?

	−	+
	Cantidad de gasolina (litros)	Distancia (km)
	5	100
	6	x
	+	

Con más cantidad de gasolina, en las mismas condiciones, se recorre más; cantidad de gasolina y distancia son directamente proporcionales.

Entonces:

$$x = \frac{6 \times 100}{5}$$

$$x = 120$$

Luego, con 6 litros de gasolina el automóvil recorrerá 120 km.

Ejemplo 3: Anita compra 5 kg de azúcar, si 2 kg cuestan $ 1,80, ¿cuánto pagará Anita?

	−	+
	**Cantidad de azúcar (kg)**	**Dinero ($)**
	2	**1,80**
	5	x
	+	

Para más cantidad de azúcar, más dinero, proporcionalidad directa.

Entonces:

$$x = \frac{5 \times 1{,}80}{2}$$

$$x = 4{,}50$$

Luego, por 5 kg de azúcar, Anita pagará $ 4,50.

Ejemplo 4: Un automóvil recorre 240 km en 3 horas. ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido en 2 horas?

	−	+
	**Tiempo (h)**	**Distancia (km)**
	3	**240**
	2	x
	+	

Para más distancia, en las mismas condiciones, más tiempo, proporcionalidad directa

Entonces:

$$x = \frac{2 \times 240}{3}$$

$$x = 160$$

Luego, en 2 horas, el automóvil habrá recorrido 160 km.

Porcentajes

Un porcentaje es un tipo de regla de tres directa en el que una de las cantidades es 100. Se denota por %.

Ejemplo 1: Una moto cuyo precio era de \$ 5000, cuesta en la actualidad 250 dólares más. ¿Cuál es el porcentaje (%) de aumento?

	−	+
	**Dinero (\$)**	**Porcentaje (%)**
	5000	**100**
	250	x
	+	

Entonces:

$$x = \frac{250 \times 100}{5000}$$

$$x = 5$$

Luego, el precio de la moto, ha aumentado un 5 %.

Ejemplo 2: Al adquirir un vehículo cuyo precio es de \$ 8800, nos hacen un descuento del 7,5%. ¿Cuánto hay que pagar por el vehículo?

	−	+
	**Porcentaje (%)**	**Dinero (\$)**
	100	**8800**
	92,5	x
	+	

Entonces:

$$x = \frac{92,5 \times 8800}{100}$$

$$x = 8140$$

Luego, hay que pagar, $ 8140.

Ejemplo 3: El precio de un ordenador es de $ 1200 sin IVA. ¿Cuánto hay que pagar por él si el IVA es del 12%?

	$-$	$+$
	Porcentaje (%)	**Dinero ($)**
	100	**1200**
	112	x
	$+$	

Entonces:

$$x = \frac{112 \times 1200}{100}$$

$$x = 1344$$

Luego, hay que pagar, $ 1344.

Regla de Tres Simple e Inversa (O Indirecta)

Ejemplo 1: Un ganadero tiene forraje suficiente para alimentar 220 vacas durante 45 días. ¿Cuántos días podrá alimentar, con la misma cantidad de forraje, a 450 vacas?

Vemos que, con la misma cantidad de forraje, si el número de vacas aumenta, se tendrá forraje para menos días, en cambio, si el número de vacas disminuye se tendrá forraje para más días; por tanto, número de vacas y tiempo, son cantidades inversamente proporcionales.

	+	−
	Número de vacas	Tiempo (días)
	220	45
	450	x
	−	

Entonces:

$$x = \frac{45 \times 220}{450}$$

$$x = 22$$

Luego, 450 vacas podrán comer 22 días.

Esta forma de plantear y resolver problemas sobre proporciones se conoce con el nombre de regla de tres simple e inversa.

Ejemplo 2: Para envasar cierta cantidad de vino se necesitan 8 toneles de 200 litros de capacidad cada uno. Queremos envasar la misma cantidad de vino empleando 32 toneles. ¿Cuál deberá ser la capacidad de esos toneles?

Como, mientras más grande sea la capacidad de los toneles menos número de toneles necesitaremos. Para almacenar la misma cantidad de vino. Por tanto, las cantidades número de toneles y capacidad de los toneles son cantidades inversamente proporcionales.
Entonces:

	+	+
	Capacidad (litros)	Número de toneles
	200	8
	x	32
		−

Entonces:

$$\mathrm{x} = \frac{200 \times 8}{32}$$

$$\mathrm{x} = 50$$

Luego, debemos tener 32 toneles de 50 litros de capacidad para poder envasar la misma cantidad de vino.

Ejemplo 3: Un vehículo tarda en realizar un trayecto 6 horas si su velocidad es de 60 km/h, ¿Cuánto demorará, en el mismo trayecto, si doblamos la velocidad?

	+	+
	Tiempo (h)	Velocidad (km/h)
	6	60
	x	120
		−

Entonces:

$$\mathrm{x} = \frac{6 \times 60}{120}$$

$$\mathrm{x} = 3$$

Luego, si duplicamos la velocidad, el tiempo se reduce a la mitad, es decir 3 horas.

Ejemplo 4: Un grifo que surte 18 l. de agua por minuto tarda 14 horas en llenar un depósito. ¿Cuánto tardaría si su caudal fuera de 72 l. por minuto?

	+	+
	Tiempo (h)	Caudal (l/min)
	14	18
	x	72
		−

Entonces:

$$x = \frac{14 \times 18}{72}$$

$$x = 3{,}5$$

Luego, si aumentamos el caudal de agua, el tiempo de llenado, se reduce a 3 horas y media.

Regla de Tres Compuesta

Ejemplo 1: Tres muchachos durante 10 días de campamento han gastado en comida $600. En las mismas condiciones, ¿cuánto gastarán en comida 7 muchachos durante 15 días de campamento? Obsérvese que, número de chicos y dinero, son directamente proporcionales; y que, número de días de campamento y dinero también son directamente proporcionales. Por tanto, tenemos:

−	−	+
Muchachos	Tiempo (días)	Dinero (dólares)
4	10	600
6	15	x
+	+	

Entonces:

$$x = \frac{600 \times 6 \times 15}{4 \times 10}$$

$$x = 2100$$

Luego, con $2100 comerán 7 chicos por 15 días.

Ejemplo 2: Doce obreros trabajando 6 horas diarias, tardan 30 días en realizar un trabajo. ¿Cuántos días tardarán en hacer el mismo trabajo 5 obreros, trabajando 8 horas diarias?

Obsérvese qué número de obreros y tiempo de trabajo son inversamente proporcionales; y qué horas diarias de trabajo y tiempo de trabajo también son inversamente proporcionales.
Construimos la tabla:

+	+	+
Obreros	Horas diarias	Tiempo (días)
12	6	30
5	8	x
−	−	

Entonces:

$$x = \frac{30 \times 12 \times 6}{5 \times 8}$$

$$x = 54$$

Luego, 5 obreros, trabajando 8 horas diarias, se demorarán 54 días para cumplir con la misma tarea.

Ejemplo 3: La empresa Metálica Inc., fabrica latas para envases de gaseosa y cerveza. En la actualidad cuenta con 4 máquinas, que trabajando 6 horas diarias han hecho 43200 envases de lunes a viernes. Por descuido del dueño una de las máquinas ya no funciona, por lo que sólo se tienen, ahora, 3 máquinas en operación. Si faltan por hacer y entregar 21600 envases en 2 días (sábado y domingo), ¿cuántas horas diarias tendrían que operar las máquinas que quedan para cumplir con el pedido?

Nótese que, el número de máquinas y el número de horas de trabajo son inversamente proporcionales; y que, el número de horas de trabajo y el número de envases son directamente proporcionales. Formamos la tabla:

	+	−	+
	Máquinas	Envases	Tiempo (horas)
	4	43200	$30\ (= 5 \times 6)$
	3	21600	x
	−	+	

Entonces:

$$x = \frac{30 \times 4 \times 21600}{3 \times 43200}$$

$$x = 20$$

Luego, 3 máquinas, deberán trabajar 10 horas diarias (20 horas divididas entre 2 días = 10 horas diarias), para cumplir con el pedido de 21600 envases.

Interés

Se llama interés al beneficio que produce el dinero prestado. Ese beneficio es directamente proporcional a la cantidad prestada y al tiempo que dura el préstamo.

$$I = Crt \quad \rightarrow \quad \begin{cases} I = Interés\ (\$) \\ C = Capital\ (\$) \\ r = Rédito\ (\%) \\ t = Tiempo\ (años) \end{cases}$$

Ejemplos:

1. Hallar el interés producido durante cinco años, por un capital de \$ 30 000, al 6%.

$$I = Crt = 30\,000 \times \frac{6}{100} \times 5 = 9000$$

2. Calcular en qué se convierte, en seis meses, un capital de $ 10 000, al 3,5%.

$$I = Crt = 10\,000 \times \frac{3,5}{100} \times \frac{6}{12} = 175$$

$$10\,000 + 175 = \$10\,175$$

3. ¿Durante cuánto tiempo ha de imponerse un capital de $ 25 000 al 5% para que se convierta en 30 000?

$$30\,000 - 25000 = 5000$$

$$t = \frac{I}{Cr} = \frac{5000}{25\,000 \times 0,05} = 4\ años$$

4. Rigoberto pidió prestado $12000 a pagar en 4 meses. Si pagó un interés de $1440, ¿cuál fue el rédito?

$$r = \frac{I}{Ct} = \frac{1440}{12\,000 \times \frac{4}{12}} = 0,36 = 36\ \%$$

Ejercicios Propuestos

1. Tres cajas contienen, cada una, 12 kilogramos de carne de res, 18 de carne de cerdo y 24 de carne de pollo. La carne de cada caja está contenida en bolsas del mismo tamaño y con la máxima cantidad de carne posible, ¿cuánto pesa cada bolsa y cuántas hay por caja?

2. Gerardo fabrica un anuncio luminoso con focos de color rojo, amarillo y verde, de tal manera que los focos rojos enciendan cada 10 segundos, los amarillos cada 6 y los verdes cada 15, si al probar el anuncio encienden todos los focos a la vez, ¿después de cuántos segundos volverán a encender juntos?

3. Un ebanista quiere cortar en cuadros lo más grande posible una plancha de madera de 300 cm de largo y 80 cm de ancho, ¿cuál debe ser la longitud de los lados de cada cuadro?

4. Un ciclista da una vuelta a una pista en 6 minutos, mientras que otro tarda 4 minutos. Si ambos inician sus recorridos juntos, ¿después de qué tiempo volverán a encontrarse y cuántas vueltas habrán dado cada uno?

5. Una llave vierte 4 litros de agua por minuto, otra 3 y una tercera, 8. ¿Cuál es la cantidad menor de litros que puede tener un pozo para que se llene en un número exacto de minutos por cualquiera de las 3 llaves?

6. Tres rollos de tela de 30, 48 y 72 metros de largo se quieren cortar para hacer banderas con pedazos iguales y de mayor longitud, ¿cuál será el largo de cada pedazo?

7. Un parque de diversiones quiere construir balsas con 3 troncos de palmera, los cuales miden 15, 9 y 6 metros, ¿cuánto deben medir los pedazos de tronco si tienen que ser del mismo tamaño?, ¿cuántos pedazos de troncos saldrán?

8. El abuelo Eduardo da dinero a 3 de sus hijos para que lo repartan a los nietos de manera equitativa. A su hijo Rubén le da $5 000, a su hijo Anselmo le da $6 000, mientras que a Horacio sólo $3 000, ¿cuál es la mayor cantidad de dinero que podrán darle a sus hijos y cuántos nietos tiene Eduardo?

9. Fabián tiene un reloj que da una señal cada 18 minutos, otro que da una señal cada 12 minutos y un tercero cada 42 minutos. A las 11 de la mañana los 3 relojes han coincidido en dar la señal, ¿cuántos minutos como mínimo han de pasar para que vuelvan a coincidir?, ¿a qué hora volverán a dar la señal otra vez juntos?

10. Daniel y Omar tienen 60 canicas azules, 45 verdes y 90 amarillas; quieren hacer costalitos iguales con el número mayor de canicas sin que sobren, ¿cuántos costalitos pueden hacer y cuántas canicas tendrá cada uno?

11. Ricardo tiene en su papelería los lapiceros en bolsas. En la caja "A" tiene bolsitas de 30 lapiceros cada una y no sobran, en la caja "B" tiene bolsitas de 25 lapiceros cada una y tampoco sobran. El número de lapiceros que hay en la caja "A" es igual al que hay en la caja "B", ¿cuántos lapiceros como mínimo hay en cada caja?

12. Rosa tiene cubos de color lila de 8 cm de arista y de color rojo de 6 cm de arista. Ella quiere apilar los cubos en 2 columnas, una de cubos de color lila y otra de color rojo, desea conseguir que ambas columnas tengan la misma altura, ¿cuántos cubos, como mínimo, tiene que apilar de cada color?

13. Tres amigos pasean en bicicleta por un camino que rodea a un lago, para dar una vuelta completa, uno de ellos tarda 10 minutos, otro tarda 15 y el tercero, 18 minutos. Parten juntos y acuerdan interrumpir el paseo la primera vez que los 3 pasen simultáneamente por el punto de partida, ¿cuánto tiempo duró el paseo?, ¿cuántas vueltas dio cada uno?

14. En 1994 se realizaron elecciones para presidente y para jefe de gobierno, el periodo presidencial es de 6 años y el de jefe de gobierno de 4. ¿En qué año volverán a coincidir las elecciones?

15. El piso de una habitación tiene 425 cm de largo por 275 cm de ancho, si se desea poner el menor número de mosaicos cuadrados de mármol, ¿cuáles serán las dimensiones máximas de cada mosaico?, ¿cuántos mosaicos se necesitan?
16. El 2% del 5% del 4% de A es:

a) 1/25 A%
b) 1/200 A%
c) 1/100 A%
d) 1/250 A%
e) 1/50 A%

17. El n% de 300 es m; y el m% de 30 es 27. ¿Cuál es el valor de n?

a) 90
b) 70
c) 30
d) 25
e) 80

18. El 40% de los ¾ del 6% de 48 es 0,072 de los 2/3 de una cantidad. Hallar el 25% de esa cantidad.

a) 9/2
b) 27
c) 36
d) 108
c) 144

19. ¿En cuánto por ciento es A mayor que Q?

a) (A-Q)/100
b) 100/(A+Q)
c) (100A+Q)/(A-Q)
d) (100(A-Q))/Q
e) A/(A+Q)

20. ¿Cuál es el porcentaje de “x + y” respecto a “x – y”?

a) ((x-y))/((x+y)) %
b) 100((x-y)/(x+y))%
c) (100x+y)/(x-y) %
d) ((x+y)/100)%
e) F.D.

21. Si el 20% más de un número es igual al 13% menos de otro número, y además la diferencia de ambos números es 56, calcular el mayor número.

a) 960
b) 840
c) 800
d) 1000
e) 480

22. ¿Qué porcentaje de (a2 –ab + b2) es (a3 + b3)

a) 100(a – b)
b) 100(a + b)
c) 100/(a-b)
d) 100/(a+b)
e) (a+b)/100

23. Si me rebajan el sueldo en 30% quedo ganando $2800 mensuales, ¿cuánto gano ahora?

a) $4000
b) $4100
c) $4200
d) $4300
e) $4400

24. Inicialmente en una fiesta el 75% eran hombres y el resto mujeres. En el transcurso de la fiesta llegaron 60 hombres y 140 mujeres. Representando el nuevo número de hombres el 65% de los asistentes. ¿Cuántas personas había inicialmente en la fiesta?

a) 300
b) 500
c) 700
d) 600
e) 800

25. ¿Qué precio de lista debe fijar un comerciante para un artículo, si al rebajarlo en 20%, obtiene una utilidad del 30% de su costo, que fue de $5000?

a) $5500
b) $7800
c) $8125
d) $8550
e) $9850

26. ¿Cuántos litros de agua debe agregarse a 10 litros de alcohol de un 95% pureza para obtener una solución de un 50% de pureza?

a) 4
b) 5
c) 7
d) 9
e) 11

27. En una reunión el número de hombres era el doble del número de mujeres; luego se retiran el 35% de los hombres, pero llegan 90 mujeres, resultando tantos hombres como mujeres. ¿Cuántas personas había al principio?

a) 600
b) 300
c) 900
d) 1200
e) 500

28. Se vende un objeto en $1040 ganando el 50% del 80% del 10% del costo. ¿A cuánto debería haberse vendido para ganar el 20% del 25% del 60% del costo?

a) 1000
b) 1050
c) 1030
d) 1100
e) 1020

29. Un hombre ahorró el año pasado $1690, que era el 13% de sus ganancias en el año. ¿Cuánto ganó en el año?

a) $5000
b) $13 000
c) $11 000
d) $12 000
e) $10 000

30. En un supermercado para determinar el precio de lista de los artículos, se multiplica los costos por un cierto factor K, de tal manera que pueda descontar 20% más 20% y aún ganar el 80% del costo. Hallar el factor 1/k.

a) 8/45
b) 16/45
c) 7/35
d) 3/15
e) 18/19

31. Al aumentar el precio de entrada en el estadio en un 20%, la asistencia bajó en un 10%, entonces la recaudación:

a) Aumentó en 20%
b) No varió
c) Aumentó en un 8%
d) Bajó en un 10%
e) Aumenta en 108%

32. Una persona lleva 900 naranjas, de las cuales el 20% estaban mal logradas y solo pudo vender el 60% de las buenas. ¿Cuántas quedaron sin vender?

a) 288
b) 432
c) 468
d) 180
e) 368

33. Se fija el precio de un artículo aumentado el a% de su precio de costo. Si luego se hace un descuento equivalente al 25% de su precio de costo y se observa que se gana el 205 de su precio de venta, ¿Cuál es el valor de a?

a) $26
b) $50
c) $40
d) $80
e) $45

34. Calcular el 20% del 30% del 80% del 50 por 80 de 8000.

a) 200
b) 240
c) 320
d) 400
e) 250

35: El 40% de los ¾ del 6% de 48 es 0,012 de los 2/3 de una cantidad. Hallar el 255 de esa cantidad.

a) 9
b) 27
c) 36
d) 108
e) 144

36. Si 25 frascos de perfume de 20 ml cada uno, cuestan $37,50, ¿cuánto costarán 18 frascos de 100 ml cada uno, del mismo perfume?

37. Sabiendo que 8 hombres tardan 12 días en ensamblar y poner a punto 16 máquinas, hallar el número de días que emplearán 15 hombres en hacer funcionar 50 de las mismas máquinas.

38. Un aeroplano tarda 2 minutos para recorrer 4,6 km. ¿Cuánto recorrió, con la misma velocidad, durante 1 hora 15 minutos, cuánto duró el viaje?

39. Un obrero gana $96 por 24 horas de trabajo (3 días), ¿cuánto tiempo ha trabajado para ganar $800?

40. Si una docena de adornos para sala cuesta $74,40, ¿cuánto debe pagarse por 27 de esos adornos?

41. Doce obreros han hecho la mitad de un trabajo en 18 horas. En ese momento, 4 obreros abandonan el trabajo, ¿cuántas horas duró la obra completa, si los obreros que quedan continúan con su labor?

42. Una familia, compuesta de 6 personas, consume en 2 días, 3 kilogramos de pan, ¿cuántos kilogramos de pan serán consumidos en 5 días, estando 2 personas ausentes?

43. Sabiendo que 2 hombres pueden transportar 6 metros cúbicos de tierra en 4 horas, calcule el número de hombres que se necesitan para transportar, la misma distancia, 18 metros cúbicos en 8 horas.

44. Cinco rotativas (máquinas impresoras) imprimen en 56 minutos 87500 ejemplares de un periódico. ¿En cuánto tiempo 7 rotativas imprimirán 350000 de esos ejemplares?

45. Si para pintar 180 m2 de pared se necesitan 6 galones de pintura, ¿cuántos galones se necesitarán para pintar una pared rectangular de 3,6 m de alto por 100 m de largo?

46. El peso normal de una persona varía directamente con el cubo de su altura. Calcule el peso normal de una persona cuya estatura es de

1,62 m, si 180 lb es el peso normal de una persona de 1,88 m de altura.

47. El cuadrado de la talla normal del zapato de las mujeres varía directamente con el cubo de su altura. Calcule la talla normal del zapato de una mujer cuya estatura es de 1,57 m si el tamaño normal del zapato de una mujer de 1,73 m de altura es de 8.

48. Para empapelar una habitación se necesitan 15 rollos de papel de 45 cm de ancho. ¿Cuántos rollos se necesitarán si el ancho fuera de 75 cm?

49. Un puente puede ser construido por 80 obreros en 42 días. Si el plazo de la obra se reduce a 30 días, ¿cuántos obreros deberán aumentarse?

50. Cinco motores consumen 1800 galones de combustible en 42 horas de funcionamiento continuo; ¿para cuántas horas alcanzará esa misma cantidad de combustible, si funcionan sólo 3 de esos motores?

51. Toño, un constructor de casas, ha pagado $1440 a 24 obreros que han trabajo 8 días de 8 horas diarias; ¿cuánto tendrá que pagar Toño, en las mismas condiciones, a 15 albañiles, que deben terminar la obra en 12 días a razón de 9 horas por día?

52. La piscina de Don Pancho se llenó en 3 días dejando abiertos 2 grifos que vierten 200 galones de agua por hora cada uno, durante 6 horas diarias. ¿Cuántos días se precisarán para llenar la misma alberca si se dejan abiertos, durante 5 horas diarias, 4 grifos que vierten 180 galones por hora cada uno?

53. Calcule:

a) El 15,8% de $4000
b) El 58,5% de 2100 kg
c) El 12 (3/4)% de $3568
d) El 6 (4/5)% de $9578,42 cm^3

54. Calcule:

a) ¿Qué porcentaje de 5000 es 690?
b) ¿Qué porcentaje de 38450 es 9750?
c) ¿Qué porcentaje de 1 es 0,690?
d) ¿Qué porcentaje de 0,125 es 0,075?

55. Calcule:

a) ¿De qué cantidad es 15 el 20%?
b) ¿De qué cantidad es 8000 el 0,5%?
c) ¿De qué cantidad es 4680000 el 9,125%?
d) ¿De qué cantidad es 1500 el 90%?

56. Calcular el valor de la factura de venta de una cocina, cuyo precio de lista (sin IVA) es $150 y el IVA es de 12%.

57. Calcular el precio al que un comerciante puede vender un par de zapatos que tienen un costo de $80 el par, con una ganancia de 25% sobre el precio de venta.

58. Suponga que fuera constante la razón (cociente) del número de horas que una tienda de video está abierta, al número de clientes diarios. Cuando la tienda está abierta 8 horas, el número de clientes es 92 menos que el número máximo de clientes. Cuando la tienda está abierta 10 horas, el número de clientes es 46 menos que el número máximo de clientes. Calcule el número máximo de clientes.

59. Para sacar el agua de una piscina de plástico se necesita realizar 210 extracciones con un cubo de 12 litros de capacidad. Si el cubo es de 20 litros, ¿cuántas extracciones necesitaremos para sacar toda el agua de la piscina?

60. Si con 70 Kg tenemos para alimentar a 25 gallinas durante 30 días. Si se mueren 15 gallinas ¿para cuántos días habrá comida suficiente?

PARTE 4
ARITMÉTICA

El estudiante que viene del bachillerato y quiere ingresar a la universidad, ha estudiado anteriormente uno o dos cursos de álgebra elemental, en los que se dio la mayor importancia a la mecanización de las operaciones algebraicas y a la obtención correcta de las soluciones. Poca o ninguna atención se puso en el análisis y razonamiento inductivo, el reconocimiento de patrones y las técnicas de resolución de problemas. Porque, esto de resolver problemas es un arte. Es por esto por lo que el propósito de este capítulo y los demás es considerar algunos de estos aspectos más una gran cantidad de problemas debidamente estructurados.

LOS FUNDAMENTOS DEL ÁLGEBRA

Cada una de las diferentes ramas de las matemáticas tiene una estructura lógica construida a partir de ciertas proposiciones fundamentales conocidas como axiomas. El estudiante ya ha visto un ejemplo de esto al estudiar la geometría elemental. Allí se deducen, en forma de teoremas, las propiedades de las figuras geométricas, tomando como punto de partida ciertos conceptos primitivos elementales (introducidos sin definición), definiciones y axiomas, siendo cada teorema una consecuencia lógica de uno o más de los teoremas precedentes o de los axiomas.

Análogamente, los fundamentos del álgebra descansan, como vamos a ver, en ciertos ***axiomas fundamentales, conceptos primitivos y definiciones.***

El punto de partida de una determinada rama de las matemáticas está asociado con el significado de ciertas palabras o expresiones básicas. Una palabra se define describiéndola en términos de otras palabras que a su vez son capaces de descripción posterior o bien son aceptadas como conocidas. Es evidente que este proceso nos conducirá a una palabra o palabras para las cuales no hay definición. Se hace entonces necesario "suponer" que tales palabras poseen significados que acordamos aceptar sin definición formal. Es en este momento cuando se establece la base para una ciencia deductiva como lo es el álgebra.

Ya que no hay restricciones al empezar, estamos en completa libertad para escoger los términos que vamos a aceptar sin definición. Es natural, y es lo acostumbrado, restringir tal selección a los conceptos más sencillos y fundamentales y que, además, no conduzcan posteriormente a contradicciones. El estudiante podrá recordar que su primera experiencia con la aritmética fue contar el número de objetos de un conjunto, y que para este propósito de usar ciertos símbolos designados por 1,2,3,4,..., y llamados números naturales. Nosotros daremos a tales números el nombre de ***enteros y positivos.***

AXIOMAS

Axioma 1: Admitimos la existencia de los números enteros y positivos, los cuales se emplean al contar el número de objetos de un conjunto y que se designan por los símbolos 1,2 ,3,4,...

El siguiente paso en la experiencia del estudiante con la aritmética consistió en la determinación del número total de objetos al reunir dos o más conjuntos de objetos. Esto requirió la operación llamada ***adición***. En particular, para la determinación del número total de objetos en dos o más conjuntos del mismo número de elementos, se empleó la operación llamada ***multiplicación***. Estas dos operaciones fundamentales conducen al axioma siguiente.

Axioma 2: Existen dos operaciones con los números enteros y positivos, llamadas adición y multiplicación, y designadas por medio de los símbolos **+** y **×**, respectivamente.

Tomando estos dos axiomas como punto de partida es posible crear todo el sistema de números utilizado en el álgebra, tal como se bosqueja en la siguiente sección.

SISTEMAS DE NÚMEROS USADOS EN ÁLGEBRA

Si con los números enteros y positivos se efectúan las operaciones de adición y multiplicación los resultados obtenidos también son números enteros y positivos. Evidentemente, los dos postulados fundamentales del álgebra restringen todo cálculo a los números enteros y positivos y a las dos operaciones de adición y multiplicación. Para quitar esta restricción, y satisfacer la necesidad de disponer de otros números, como los números negativos y los fraccionarios, se hace necesario introducir otros conceptos.

En los cursos de álgebra elemental el estudiante aprendió a utilizar letras para representar números. Según esto representamos por ***a*** y ***b*** a dos números enteros y positivos dados, los cuales vamos a sumar, y sea c su ***suma***. Entonces tenemos la igualdad y afirmamos que representa la solución del siguiente problema: "dados dos números enteros y positivos ***a*** y ***b*** hallar su suma ***c***".

$$a+b=c$$

Ahora consideramos el problema inverso, es decir, "dada la suma c, de dos números enteros y positivos ***a*** y ***b***, y dado uno de ellos, digamos a, encontrar el otro ***b***". La resolución de este problema requiere la operación inversa de la adición, la cual es llamada ***sustracción***. Esta nueva operación se representa por medio del símbolo -, y escribimos la solución en la forma:

$$b=c-a$$

En donde, se afirma que ***b*** es el resultado de restar a de c. Por su experiencia anterior con los números el estudiante se dará cuenta de que las relaciones ***a+b=c y b=c-a*** son equivalentes, siendo posible obtener una cualquiera a partir de la otra.

Fijémonos ahora en el importante hecho de que en un sistema de números restringido a los enteros y positivos es imposible restar un número mayor de otro menor. Para hacer posible la sustracción en este caso, se introducen los nuevos números llamados números enteros y negativos y designados por los símbolos -1,-2,-3,...

En particular, si restamos un número entero de sí mismo, obtenemos el importante número ***cero*** designado por el símbolo 0. Así, si a representa cualquier número entero, tenemos la relación:

$$a-a=0$$

La cual podemos considerarla como definición del cero. Nótese que 0 no es ni un número entero positivo ni un entero negativo.

Ahora vamos a considerar la operación de multiplicación ya indicada. Sean ***a*** y ***b*** las representaciones de dos números enteros dados que vamos a multiplicar entre sí, y sea c la representación de su producto. Entonces escribimos la igualdad

$$a \times b=c$$

En la cual ***a*** y ***b*** se llaman ***factores*** de ***c***, y afirmamos que dicha relación representa la solución del siguiente problema: "dados dos números enteros ***a*** y ***b***, hallar su producto ***c***".

Consideremos ahora el problema inverso, es decir, "dado el producto ***c***, de dos números enteros ***a*** y ***b***, y dado el factor ***a***, hallar el otro factor ***b***". La resolución de este problema requiere de una operación que sea inversa de la multiplicación y es la llamada división. Escribimos la solución en la forma:

$$b=c/a$$

Que establece que ***b*** es el resultado de dividir ***c*** entre **a**. En esta relación, ***c*** se llama el ***dividendo, a*** el ***divisor*** y ***b*** el ***cociente***.

Es importante observar que en ningún sistema de números limitado a los números enteros no es siempre posible efectuar la operación de dividir. Así, si dividimos el entero 6 entre el entero 3, el resultado es 2, o sea otro entero. Pero si intentamos dividir el entero 5 entre el entero 3, la operación no es posible, ya que no existe ningún número entero que multiplicado por el entero 3 dé un producto igual al entero 5. Para hacer que en este caso y en otros análogos, la división sea posible, se introducen nuevos números llamados números fraccionarios o fracciones y que se representan como c/a, llamándose ***numerador*** al entero ***c*** y ***denominador*** al entero a.

Habiendo incluido las facciones en nuestro sistema de números, la operación de dividir expresada así:

$$b=c/a$$

Es posible en todos los casos con una sola excepción, a saber, cuando el divisor a es cero. Más adelante veremos que en la operación de dividir está excluida la división entre cero. En consecuencia, las igualdades $a \times b = c$ *y* $b = c/a$ son equivalentes, siendo posible obtener cualquiera de ellas a partir de la otra, siempre y cuando el divisor a sea distinto de cero.

Hasta este momento nuestro sistema de números está formado por los números enteros positivos y negativos, el cero y los números fraccionarios positivos y negativos. Estos números constituyen el sistema de los ***números racionales.***

NÚMEROS RACIONALES

Definición: Se dice que un número es ***racional*** si puede ser expresado en la forma a/b en donde a es cualquier número entero positivo o negativo, o cero y b es cualquier número entero positivo o negativo.

Los números enteros son números racionales. Por ejemplo, $5=5/1=10/2=\ldots$ También el cero es un número racional ya que $0=0/a$ en donde a es cualquier entero diferente de cero.

Consideremos ahora el caso especial de la multiplicación en que todos los factores que se van a multiplicar son iguales. Así, si multiplicamos el número a por sí mismo, obtenemos el producto **a×a**, el cual generalmente escribimos en la forma a^2. En general, el producto de ***n*** factores, cada uno de ellos iguales a ***a***, se escribe en la forma a^n, recibiendo el número entero y positivo ***n*** el nombre de ***exponente***. En este caso decimos que hemos elevado el número ***a*** a la enésima potencia, operación que recibe el nombre de ***potenciación***. Esta operación se escribe en la forma:

$$a^n=b$$

Representa la solución del problema: "Dados el número ***a*** y el número entero y positivo ***n*** hallar el número ***b*** que es la enésima potencia de ***a***". Consideremos ahora el problema inverso, es decir, dados el número ***b*** y el entero y positivo ***n*** hallar el número ***a*** cuya enésima potencia es igual a ***b***. La resolución a este problema requiere una operación que es inversa de la potenciación, llamada ***radicación***. La solución se escribe en la forma:

$$\mathbf{a = \sqrt[n]{b}}$$

La cual establece que ***a*** es una raíz enésima de ***b***. Por esta razón la operación radicación también es llamada extracción de una raíz. En $\mathbf{a = \sqrt[n]{b}}$ el símbolo $\sqrt{\ }$ se llama radical y el entero ***n*** se llama índice de la raíz.

Hemos llegado ahora a una importante etapa en el desarrollo del sistema de números usados en álgebra. Las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación, cuando se aplican a números racionales producen resultados únicos que también son números racionales, es decir, no requieren ampliación del sistema de números. Sin embargo, esto no es cierto para la radicación. Por ejemplo, la raíz cuadrada de 4 no tiene un resultado único, pues, puede ser **+2** o **-2** ya que $(-2)^2=4$, o sea, lo mismo que $(+2)^2$. En este caso los resultados, aunque no son únicos son todavía racionales. Sin embargo, consideremos ahora la raíz cuadrada positiva de 2 la cual puede ser escrita simplemente como $\sqrt{2}$. No es difícil demostrar que este número no puede ser expresado en la forma ***a/b*** de modo que llene el requisito de la definición de número racional. Un número como este se llama irracional. El sistema de números racionales, junto con todos los números ***irracionales*** positivos y negativos constituyen el sistema de números ***reales*** del álgebra.

Hemos visto que la radicación no sería posible en algunos casos si nos limitáramos al sistema de números racionales. Fue esto lo que nos hizo añadir los números irracionales a nuestro sistema numérico. Podemos observar también que en nuestros ejemplos anteriores se han utilizado únicamente la raíz cuadrada de números positivos. Para que la radicación comprenda todos los casos, debemos considerar también la extracción de raíces de números negativos. Por ejemplo, tratemos de hallar la raíz cuadrada de **-4** es decir, queremos hallar un número a tal que $a^2=-4$. Como una propiedad fundamental del sistema de los números reales es que el cuadrado (o una potencia par) de cualquier número real (positivo o negativo) es un número real positivo, resulta evidente que el número a no puede pertenecer al sistema de números reales. Para hacer posible esta operación es necesario introducir una nueva clase de números.

Sea ***c*** cualquier número positivo, lo cual equivale a que -c sea un número negativo y que $\pm\sqrt{-c}$ no sea número real. Podemos escribir:

$$\pm\sqrt{-c} = \pm\sqrt{c}\sqrt{-1}$$

En esta relación $\pm\sqrt{-c}$ es un número real, lo que significa que si queremos dar algún significado a $\pm\sqrt{-c}$, debemos dar significado o sea definir, a $\sqrt{-1}$.

NÚMEROS IMAGINARIOS Y COMPLEJOS

La cantidad $\sqrt{-1}$ se llama unidad imaginaria, la cual se representa por medio del símbolo i, y que tiene la propiedad de que $i^2=-1$.

Según esta definición, la relación $\pm\sqrt{-c} = \pm\sqrt{c}\sqrt{-1}$ puede ser escrita en la forma:

$$\pm\sqrt{-c} = \pm\sqrt{c}i$$

Ya que $\pm\sqrt{c}$ es un número real, lo podemos representar por medio del número real b, resultando que bi representa una nueva clase de números que definimos así:
Un número de la forma ***bi***, en donde ***b*** es cualquier número real e i es la unidad imaginaria, se llama un ***número imaginario puro***.

Pero un número podría constar de la suma de un número real con un número imaginario puro. Este es llamado número complejo, que se define así:
Un número de la forma ***a+bi***, en donde ***a*** y ***b*** son números reales, e ***i*** es la unidad imaginaria, se llama un ***número complejo***.

Debido a todo lo anterior podemos decir ahora, que para hacer posible en todos los casos las seis operaciones, fue necesario ampliar nuestro sistema de números hasta la inclusión de los números complejos. Pero podemos hacer una observación muy significativa respecto al número complejo $a+bi$. Si $a=0$ pero $b\neq 0$, $a+bi$ toma la forma bi, lo cual significa que los números imaginarios puros son un caso especial de los números complejos. Si $b=0$, $a+bi$ toma la forma a, y por lo tanto representa un número real. Según este punto de vista un número real es simplemente un caso particular de un número complejo, por lo cual se dice que el conjunto de todos los números reales es un subconjunto de los números complejos. Aunque a menudo tendremos ocasión de hacer una distinción precisa entre números reales y números complejos. Consideraremos, en virtud de nuestra última afirmación, que el sistema de números usados en el álgebra es el sistema de números complejos.

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Definición: Se dice que un proceso matemático es ***algebraico*** si contiene una o varias de las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación aplicadas una o varias veces, en cualquier orden, a números complejos cualesquiera o a símbolos cualesquiera que representen números complejos.

Como un ejemplo de esta definición consideremos la expresión $2x^2-3xy+4y^2$. Esta expresión es algebraica porque ha sido formada aplicando operaciones algebraicas a números y a letras que representan números. Como otro ejemplo, consideremos la ecuación cuadrática:

$$ax^2+bx+c=0, \quad a\neq 0$$

Cuya solución está dada por la fórmula cuadrática:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Esta solución es algebraica ya que contiene operaciones algebraicas efectuadas con números. Es interesante observar que en el cálculo de esta fórmula intervienen las seis operaciones algebraicas.

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES EN ÁLGEBRA

Debido a que el estudiante tendrá numerosas ocasiones para referirse a las propiedades del sistema de los números reales, se presentarán en esta sección. Al establecer las propiedades siguientes, las letras a,b,c y d representarán números reales.

PROPIEDADES DE LA IGUALDAD

I-1 (Propiedad Reflexiva) $a=a$
I-2 (Propiedad Simétrica) $a=b \rightarrow b=a$
I-3 (Propiedad Transitiva) $(a=b)\wedge(b=c)\rightarrow a=c$
I-4 (Propiedad de la Adición) $(a=b)\wedge(c=d)\rightarrow a+c=b+d$
I-5 (Propiedad de la Sustracción) $(a=b)\wedge(c=d)\rightarrow a\text{-}c=b\text{-}d$
I-6 (Propiedad de la Multiplicación) $(a=b)\wedge(c=d)\rightarrow a\cdot c=b\cdot d$
I-7 (Propiedad de la División) $(a=b)\wedge(c=d\neq 0)\rightarrow(a)/c=(b)/d$
I-8 (Propiedad de la Sustitución) Cualquier expresión puede reemplazarse por una expresión equivalente en una igualdad, sin cambiar el valor de verdad de la ecuación.

PROPIEDADES DE ORDEN

O-1 (Propiedad de tricotomía) Para todo par de números reales, a y b, es cierta una y sólo una de las proposiciones siguientes: $a<b, a=b, a>b$
O-2 (Propiedad de la Adición) $(a<b)\wedge(c\leq d\rightarrow a+c<b+d$
O-3 (Propiedad de la Sustracción) $(a<b)\rightarrow a\text{-}c<b\text{-}c$
O-4 (Propiedad de la Multiplicación) $(a<b)\wedge(c>0)\rightarrow a\cdot c<b\cdot c$
$(a<b)\wedge(c<0)\rightarrow a\cdot c>b\cdot c$
O-5(Propiedad de la División) $(a<b)\wedge(c>0)\rightarrow a/c<b/c$
$(a<b)\wedge(c<0)\rightarrow a/c>b/c$
O-6 (Propiedad Transitiva) $(a<b)\wedge(b<c)\rightarrow a<c$
O-7 (Propiedad de Partición) $(c=a+b)\wedge(b>0)\rightarrow c>a$
O-8 (Propiedad de Sustitución) Cualquier expresión puede reemplazarse por una expresión equivalente en una desigualdad, sin cambiar el valor de verdad de la desigualdad.

PROPIEDADES DE CAMPO

Operaciones de Adición
C-1 (Propiedad de Cerradura) $a+b$ es un número real

C-2 (Propiedad Asociativa) $a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c)$
C-3 (Propiedad Conmutativa) $a+b=b+a$
C-4 (Propiedad Aditiva del Cero) Existe un número real 0, el elemento neutral aditivo, tal que $a+0=0+a=a$
C-5 (Propiedad del Inverso Aditivo) Para todo número real a, existe un número real (-a), el inverso aditivo de a, tal que $a+(-a)=(-a)+a=0$

OPERACIONES DE MULTIPLICACIÓN

C-6 (Propiedad de Cerradura) $a\cdot b$ es un número real
C-7 (Propiedad Asociativa) $a\cdot b\cdot c=(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
C-8 (Propiedad Conmutativa) $a\cdot b=b\cdot a$
C-9 (Propiedad Multiplicativa del Uno) Existe un número real 1, el elemento neutral multiplicativo, tal que $a\cdot 1=1\cdot a=a$
C-10 (Propiedad del Inverso Multiplicativo) Para todo número real a $(a\neq 0)$, existe un número real (1/a), el inverso multiplicativo de a, tal que

$$a\cdot(1/a)=(1/a)\cdot a=1$$

C-11 (Propiedad Distributiva) $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES

Las siguientes fórmulas son las más frecuentes:
1. Factor monomio común. Tipo: $xy+yz=x(y+z)$
2. Diferencia de dos cuadrados. Tipo: $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$
3. Trinomios. Tipo: $a[\![cx]\!]^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$
4. Suma o diferencia de dos cubos. Tipo: $x^3\pm y^3=(x\pm y)(x^2\mp xy+y^3)$
5. Agrupamiento de términos.
   Tipo: $wy+xy+wz+xz=y(w+x)+z(w+x)=(w+x)(y+z)$

Ejemplos:

Las siguientes expresiones, se descomponen en factores, de acuerdo con las fórmulas dadas:
1. $10a^2b^3c^4-15a^3b^2c^4+30a^4b^3c^2=5a^2b^2c^2(2bc^2-3ac^2+6a^2b)$
2. $3t^2-12=3(t^2-4)=3(t+2)(t-2)$

3. $(5m+2n)^2-(3m-7n)^2=[(5m+2n)+(3m-7n)][(5m+2n)-(3m-7n)]$
$=(8m-5n)(2m+9n)$
4. $25x^2+60xy+36y^2$

$5x$	⤨	$6y$	$30xy$ ⊕ $30xy$
$5x$		$6y$	$60xy$

$\therefore 25x^2+60xy+36y^2=(5x+6y)(5x+6y)=(5x+6y)^2$

5. x^2-6x+8

$1x$	⤨	-4	$-4x$ ⊕ $-2x$
$1x$		-2	$-6x$

Entonces: $x^2-6x+8=(x-4)(x-2)$

6. $64m^{12}n^3-68m^8n^7+4m^4n^{11}=4m^4n^3(16m^8-17m^4n^4+n^8)$

$16m^4$	⤨	$-1n^4$	$-1m^4n^4$ ⊕ $-16m^4n^4$
$1m^4$		$-1n^4$	$-17m^4n^4$

$\therefore 64m^{12}n^3-68m^8n^7+4m^4n^{11}=4m^4n^3(16m^8-17m^4n^4+n^8)$

$=4m^4n^3(16m^4-n^4)(m^4-n^4)=4m^4n^3(4m^2+n^2)(4m^2-n^2)(m^2+n^2)(m^2-n^2)$

$=4m^4n^3(4m^2+n^2)(2m+n)(2m-n)(m^2+n^2)(m+n)(m-n)$

SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

Ejemplos:

Simplifique	Solución
$\dfrac{a^3b+3a^2b+9ab}{a^3-27}$	$\dfrac{ab(a^2+3a+9)}{(a-3)(a^2+3a+9)}=\dfrac{ab}{a-3}$
$\dfrac{6m-12}{4mn+4m}\times\dfrac{n^2-1}{m^2-3m+2}$	$\dfrac{6(m-2)}{4m(n+1)}\times\dfrac{(n+1)(n-1)}{(m-2)(m-1)}$ $=\dfrac{3(n-1)}{2m(m-1)}$
$\dfrac{x^2y+xy^2}{x-y}\div(x+y)$	$\dfrac{xy(x+y)}{x-y}\times\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{xy}{x-y}$
$\dfrac{x}{(z-x)(x-y)}+\dfrac{y}{(x-y)(y-z)}+\dfrac{z}{(y-z)(z-x)}$	$\dfrac{x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)}{(x-y)(y-z)(z-x)}$ $\dfrac{xy-xz+yz-xy+xz-yz}{(x-y)(y-z)(z-x)}=0$
$2-\dfrac{2}{1-\left(\dfrac{2}{2-\frac{2}{t^2}}\right)}$	$2-\dfrac{2}{1-\left(\dfrac{1}{\frac{t^2-1}{t^2}}\right)}$ $2-\dfrac{2}{1-\frac{t^2}{t^2-1}}$ $2-\dfrac{2}{\frac{-1}{t^2-1}}$ $2+2t^2-2=2t^2$

Ejercicios Propuestos

1. Reducir: $S=((x+24)(x^2-2xy+4y^2))/(x^3+8y^3)$

   a) 1
   b) 2
   c) 3
   d) 4
   e) 6

2. Simplificar: $Q=((x^6+y^6)^2+(x^6-y^6)^2)/(x^\wedge 2+y^{12})$

   a) 1
   b) 2
   c) 3
   d) 4
   e) 5

3. Reducir: $M=((x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1))/(x^8+x^4+1)$

   a) 1
   b) 2
   c) 20
   d) -1
   e) 0

4. Efectuar: $Q=(a+b)^4-(a-b)^4$

   a) 8ab
   b) $2(a^2+b^2)$
   c) $8ab\,(a^2+b^2)$
   d) ab
   e) a^2+b^2

5. Efectuar; si: $a > 0$ ^ $b>0$ E= $(a + \sqrt{b})(a^4 + a^2b + b^2)(a - \sqrt{b})$

a) $a^3 - b^3$
b) $a^3 - b$
c) $a^6 - b^3$
d) $a^6 - b^2 10$
e) $a^6 - b^4$

6. Si: $(a + b)^3 = a^3 + b^3$; $ab \neq 0$; Hallar: (a/b)

a) 1
b) 6
c) -3
d) -1
e) 2

7. Efectuar: E= $\sqrt[7]{5 + 2\sqrt{6}} \cdot \sqrt[7]{5 - 2\sqrt{6}}$

a) 10
b) 5
c) -10
d) 1
e) 2

8. Si: a + b +c= 0; calcular: $E = \dfrac{(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

a) 1
b) 2
3) 3
4) 4
8) 5

9. Si $m^3 > n6; m, n > 0;$ efectuar:

$$P= \sqrt[3]{m\sqrt{m} - \sqrt{m^3 - n^6}} \cdot \sqrt[3]{m\sqrt{m} + \sqrt{m^3 - n^6}}$$

a) mn
b) m^2
c) m^3
d) m^4
e) n^2

10. Sabiendo: $a+b= S$^$ab=P$, reducir: $K=((a+b)^4-[\![(a-b)]\!]^4)/(P(S^2-2P))$

a) 8
b) 8SP
c) 4SP
d) 6SP
e) 8P (S^2-2P)

11. Reducir: E= $4(a - b)(a - c) + (b - c)^2$;
Si: 2a= b +c + d.

a) 10
b) 12
c) 14
d) 16
e) 18

12. Hallar (M + N), si: M= $(a - b + c)^4 - (c - b - a)^4$;
N= $(a + b - c)^4 - (c - b - a)^4$

a) 1
b) 0
c) 2
d) 4
e) 6

13. A partir de las relaciones:
$x^{-1} - y^{-1} = (x - y - 1)^{-1}$;
$y^{-1} - z^{-1} = (y - z - 1)^{-1}$;
$z^{-1} - x^{-1} = (z - x - 1)^{-1}$;
calcular: $E=3(a^2+ b^2+ c^2)-2(a^3+ b^3+ c^3)/(1-6abc)$

a) 1
b) -1
c) 2
d) 6
e) -3

14. Si de $4x-3y$ se resta $2x+5z-6$, se obtiene:

a) 2x-3y+5z-6
b) -2x-3y+5z-6
c) -2x+3y+5z-6
d) 2x-3y-5z+6

15. $(a+b)-(2a-3b)-(5a+7b)-(-13a+2b)=$

a) 7a-5b
b) 5a-7b
c) -7a-5b
d) -7+5b

16. $7a-\{3a-[4a-(5a-2a)]\}=$

a) -5a
b) 0
c) 5a
d) 3a

17. $40xy-(9x-8y)(5x+2y)-(-3x+4y)(15x+4y)=$

a) $41xy$
b) $-14xy$
c) xy
d) $14xy$

18. De la expresión, $(a^3-a^2 b-2ab^2+b^3)(3a^2-5ab+4b^2)$, restar $(3a^3-2a^2 b-4ab^2-b^3)(a^2-2ab+b^2)$ y, así, obtener:

a) $4a^2 b^3-11ab^4-5b^5$
b) $4a^2 b^3+11ab^4+5b^5$
c) $-4a^2 b^3-11ab^4+5b^5$
d) $4a^2 b^3-11ab^4+5b^5$

19. Al dividir: $(3x^5-2x^4+3x^3-2x^2-x-1)/(x-2)$, se obtiene:

a) Cociente=$3x^4+4x^3+11x^2+20x+39$ y Resto=-77
b) Cociente=$3x^4-4x^3+11x^2-20x+39$ y Resto=77
c) Cociente=$-3x^4+4x^3-11x^2+20x-39$ y Resto=77
d) Cociente=$3x^4+4x^3+11x^2+20x+39$ y Resto=77

20. Al dividir: $(-33x^2-108)/(x+6)$, se obtiene:

a) Cociente=$x^3+6x^2+3x+18$ y Resto=0
b) Cociente=$-x^3+6x^2-3x+18$ y Resto=0
c) Cociente=$-x^3-6x^2-3x-18$ y Resto=0
d) Cociente=$x^3-6x^2+3x-18$ y Resto=0

21. Descomponer en factores: $6x^3 y+4x^2 y-10xy$

a) $2xy(3x-5)(x+1)$
b) $2xy(3x+5)(x-1)$
c) $2xy(3x+5)(x+1)$
d) $2xy(3x-5)(x-1)$

22. Descomponer en factores: $x^3 y-25xy^3$

a) $xy(x+5y)(x-5y)$
b) $(x+5y)(x-5y)$
c) $xy(x+5y)(x+5y)$
d) $xy(x^2-25y^2)$

23. Descomponer en factores: x^6-7x^3-8

a) $(x-2)(x+1)(x^2+2x+4)(x^2+x+1)$
b) $(x-2)(x+1)(x^2-2x+4)(x^2+x+1)$
c) $(x-2)(x+1)(x^2+2x+4)(x^2-x+1)$
d) $(x+2)(x-1)(x^2+2x+4)(x^2-x+1)$

24. Descomponer en factores: x^3-2x^2-4x+8

a) $(x-2)(x+2)^2$
b) $(x+2)(x-2)^2$
c) $(x+2)(x+2)^2$
d) $(x+2)(x^2-4)$

POTENCIACIÓN

Definiciones

1. $a^n=\overbrace{a\times a\times a\cdots}^{n\ veces}$ donde a es la base y n es el exponente.
2. $a^{-n}=1/a^n$

Propiedades

1. $a^m\ a^n=a^{m+n}$
2. $a^m/a^n=a^{m+n}$
3. $a^0=1\quad (a\neq 0)$
5. $(a^m)^n=a^{m+n}$
6. $(a\times b)^m=a^m\times b^m$
7. $(a/b)^m=a^m/b^m$

RADICACIÓN

Definición

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Propiedades

1. $\sqrt[n]{a \times b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$

2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Ejemplos:

Simplifique	Solución
$(a^2+1)^{-5/2}(a^2+1)^0(a^2+1)^2$	
$\sqrt[6]{\sqrt[3]{x^2}}$	
$\sqrt{\frac{\sqrt[5]{a}\sqrt[4]{b^3}}{\sqrt[3]{c^2}}}$	
$\frac{\left(a+\frac{1}{b}\right)^m \times \left(a-\frac{1}{b}\right)^n}{\left(b+\frac{1}{a}\right)^m \times \left(b-\frac{1}{a}\right)^n}$	

Ejercicios Propuestos

1. Multiplicar: $M = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1) (x^2 - x + 1)$

a) X
b) $X^3 - 1$
c) $X^3 + 1$
d) $X^6 -1$
e) $X^6 +1$

2. Efectuar: $L = (x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^4+y^4) + y^8$

a) $x^2 - y^2$
b) x^2+y^2
c) x^8
d) y^8
e) y^{16}

3. Multiplicar: $N = (9x^2 + 3x + 1)(3x - 1)$

a) $27x^3$
b) $27x^3 - 1$
c) $27x^3 + 1$
d) $27x^3 + 8$

4. Multiplicar: $B = (4x^6 - 2x^3 + 1)(2x^3 + 1)$

a) $8x^3 + 1$
b) $8x^3 - 1$
c) $8x^9 + 1$
d) $8x^9 - 1$

5. Efectuar: $L=(\sqrt[3]{3}+1)(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1)$

a) 3
b) 4
c) 8
d) -4

6. Efectuar: $A= (\sqrt[3]{10} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{100} + \sqrt[3]{20} + \sqrt[3]{4})$

a) 1
b) 10
c) 2
d) 8

7. Efectuar: N= $\frac{(x+y)^3+(x-y)^3}{(x^2+3y^2)}$

a) 2
b) 2x
c) -2x
d) x
e) xy

8. Efectuar: C= $\frac{(x+y)^3-(x-y)^3}{(y^2+3x^2)}$

a) 2
b) 2y
c) -2y
d) y
e) xy

9. Simplificar: C= $(x^7 + 6)(x^7 + 3) - (x^7 + 5)(x^7 + 4)$

a) 18
b) 20
c) -2
d) 2

10. Hallar el valor numérico de: T=$(x^2 +3)(x^4-3x^2 + 9) - (x^4+3x^2+9)(x^2-3)$

Para x= $\sqrt{7+\sqrt{2}}$

a) 50
b) 52
c) 54
d) 51
c) 58

11. Efectuar: $E(x) = (x + 5)(x + 4) - (x + 10)(x + 2)$; y evaluar para: $x= 1/21$

a) 1/7
b) -1/7
c) ¼
d) 1/9

12. Reducir: $A=(x^n + 8)(x^n + 2) - (x^n + 3)(x^n +7)$

a) x^n
b) $x2^n$
c) $2x^n$
d) -5
e) -1

13. Si la suma de dos números es 7 y su producto es 10, calcular la suma de sus cuadrados.

a) 29
b) 49
c) 39
d) 109
e) 69

14. Si: $(x + 8)(x + 9) - (x + 7)(x + 10) =A$;
$(x - 5)(x - 4) - (x - 6)(x - 3) =B$;
Calcular: (AB).

a) 1
b) 2
c) -4
d) 8
e) 12

15. Si: $x - x^{-1} = 2$; Calcular: $w = x^4 + x^{-4}$

a) 30
b) 6
c) 34
d) 36
e) 37

16. Reducir: $M=(x+2y-7z)^3 + (x-2y+7z)^3 - 8x^3+6x(x+2y-7z)(x-2y+7z)$
a) x
b) 2xyz
c) 0
d) $x - y$
e) $2y^2$

17. Simplificar: L= $\sqrt{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1}$

a) $X^2 + 5x + 5$
b) $X^2 - 5x + 5$
c) $-x^2 - 5x - 5$
d) $X^2 - 5$
e) N.A.

18. Si: $a + b + c = 0$; calcular: $M=(a^3+ b^3+c^3)/abc$

a)1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 6

19. Si: $a+ b+ c= 0$; calcular: $M=((a+b)^3+ (b+c)^3+ (a+c)^3)/abc$

a)= -3
b) 3
c) 1
d) abc
e) a + b +c

20. Si: $a+b+c=0$; $abc=5$; hallar el valor de: $L=ab(a+b)^4+bc(b+c)^4+ac(a+c)^4$

a) 10
b) 70
c) 75
d) 85
e) 2002

21. Si: $m + n = 5$; $mn = 2$; Calcular: $L= m^2 + m^3 + m^4 + n^2 + n^3 + n^4$

a) 603
b) 573
c) 495
d) 549
e) 605

22. Si: $\sqrt{m^2 + n^2} + \sqrt{m^2 - n^2} = n^2$ Hallar: $E=\sqrt{m^2 + n^2} - \sqrt{m^2 - n^2}$

a) 0
b) 1
c) n^2
d) m^2
e) 2

23. Si: $x + 2 = 23\sqrt{2}\,x$; Calcular; $E=\dfrac{\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{2}}}{\sqrt[8]{2x}}$

a) $\sqrt{5}$
b) 5
c) $\pm\sqrt{5}$
d) $\sqrt{3}$
e) $\pm\sqrt{3}$

24. Dada la expresión: $(a + 2b)^2 + (a - 2b)^2 = 8ab$; Hallar el valor de: $M=(ab+2b^2)/a^2$

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

25. Simplificar: $P=\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}\right)\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)$

a) 1
b) 2
c) a
d) b
e) ab

26. Si: $x^2 + 1= 3x$; hallar: $x^3 + x^{-3}$

a) 36
b) 24
c) 18
d) 29
e) 31

27. Si: $x+\frac{1}{x}=\sqrt{7}$ Calcular: $x^4 + 1/x^4$

a) 34
b) 23
c) 47
d) 49
e) 45

28. Efectuar: $(a+ 3b + c)^2 +(a+ 2b + c)^2 -2(a+ b + c)\ (a+ 4b + c)$

a) $5\ a^2$
b) $5b^2$
c) $5c^2$
d) $3a^2$
e) $4a^2$

29. Simplificar: $(x+y)^2- (x-y)^2/xy$

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

30. Si: $1/x + 1/y= 4/(x+y)$; Calcular: $R=(x^2+ y^2)/xy + (x+3y)/2x$

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4

31. Si: : $(a/b)_n + (b/a)_n = 62$; Reducir: $\sqrt[3]{\dfrac{a^n+b^n}{\sqrt{a^n\ b^n}}}$

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

32. Si: $x - 1 = y + 1 = \sqrt{2}$ Calcule: $J=(3x + y)(x + 3y)$

a) 18
b) 20
c) 38
d) 28x
e) 32

33. Si:9 $(x + y)(x + z)(y + z)= 210$; $X^3 + y^3 + z^3= 99$; Calcular: $x + y+ z$

a) 3
b) 5
c) 4
d) 7
e) 9

34. Si: $x - 1=\sqrt[3]{2}$; $y + 1= \sqrt[3]{2}$; Calcular: $R= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

a) 2
b) 4
c) 8
d) 16
e) 32

35. Si: $x + y + z=0$; hallar: $P=\left(\frac{x+y}{z} + \frac{y}{x+z} + \frac{x}{y+z}\right)^2$

a) 1
b) 3
c) 6
d) 9
e) 12

36. Reducir: $X2 - (3x + 1)(3x + 2) + 2(2x + 1)^2$

a) 2x
b) −x
c) 0
d) X
e) -2x

37. Si: $\left(n + \frac{1}{n}\right)^2 = 7;$ Hallar el valor de: $n^3 + 1/n^3$

a) $5\sqrt{7}$
b) $\sqrt{7}$
c) 7
d) $2\sqrt{7}$
e) $4\sqrt{7}$

38. Si: $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 3;$ Hallar el valor de: $a^3 + 1/a^3$

a) 27
b) 6
c) 12
d) 4,5
e) 0

39. Efectuar: $(x + 1)(x + 2) - (x + 3)^2 + (x - 3)^2 - (x - 4)(x - 5)$

a) -14
b) -16
c) -18
d) -20
e) -22

40. Reducir: $(x^2 + 8x + 11)^2 - (x + 1)/x + 3)(x + 5)(x + 7)$

a) 2
b) 4
c) 8
d) 16
e) 20

41. Efectuar: $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 +1)(x^8 + 1)(x^{16} + 1) - x^{16}$

a) 0
b) -1
c) 1
d) -2
e) 216

42. Si: $\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}$; Calcular: R= $\sqrt{9x^2 + \sqrt{36x^2 + 12x + 1}}$

a) $3\sqrt{3}$
b) 0
c) $-3\sqrt{3}$
d) $2\sqrt{3}$
e) 1

43. Efectuar: $(a + b + c)(a - b + c) + (b - a + c)(a + b - c)$

a) 0
b) abc
c) 2bc
d) 4ac
e) 8bc

44. Si: $a + b = 6$; $a^2 + b^2 = 30$; calcular: $N = a^2/b + b2/a$.

a) 50
b) 54
c) 51
d) 48
e) 46

45. Simplificar: P= $\sqrt[5]{x+\sqrt{x^2-y^{10}}}\cdot\sqrt[5]{x-\sqrt{x^2-y^{10}}}$

a) 0
b) y^2
c) x^2
d) x
e) y

46. Dada: x + 1/x =5 Calcular: $x^5 + x^{-5}$

a) $\sqrt{5}$
b) $32\sqrt{5}$
c) $30\sqrt{5}$
d) 0
e) $5\sqrt{5}$

47. Si: a + b +c= 2; $a^3 + b^3 + c^3 = -1$; Calcular: M=(a + b)(a + c)(b + c)

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

48. Efectuar: M=((x+9)^2-(x+13)(x+5))/((x+10)(x+9)-(x+16)(x+3))

a) 8/21
b) 21/8
c) 0
d) ¾
e) ½

49. Si: $a^2 + b^2 = 3ab$; Calcular:

$M=(a/b)^7 + (b/a)^7$

a) 843
b) 921
c) 920
d) 2
e) 9

50. Hallar: A – B, si: $\begin{cases} A=(x+2)(x-3)(x+4)(x-5) \\ B=x^2(x-1)^2-26(x^2-x+4) \end{cases}$

a) 220
b) 224
c) 12
d) 14
e) 16

51. Si: $1/b+1/c=4/a$, calcular: $M=(a+b-c)^3+2(b+c-a)^3+(c+a-b)^3)/(b+c)^3$

a) -2
b) -1
c) 0
d) 1
e) 2

52. Calcular: $E=\dfrac{(x^2+a^2)-a^2x^2}{(x+a)^2-ax}$ Si: $x=\dfrac{a-\sqrt{4-3a^2}}{2}$

a) 1
b) 2
c) ½
d) 0,3
e) 3

53. Dada: $a/2b + 2b/a = 2$, calcular: a^8b^{-8}.

a) 1
b) 2
c) 2^{16}
d) 256
e) 1024

54. Si: $a=\sqrt{4+\sqrt{15}}-\sqrt{4-\sqrt{15}}$; Calcular: M= (a+1)(a2+a+1) (a2-a +1)

a) 210
b) 215
c) 220
d) 216
e) 240

55. Reducir: $[(a+2b)^2-(a-2b)^2+a^2\ +16b^2]-(4b-a)^2$

a) 0
b) 1
c) 4ab
d) 16ab
e) 20ab

56. Si: $\sqrt{(a+x)}+\sqrt{(a\text{-}x)}=2x$; Calcular: $E=\sqrt{(a+x)}-\sqrt{(a\text{-}x)}$; con: $x \neq 0$

a) 0
b) 1
c) x
d) 2x
e) 4x

57. Reducir: E= $\frac{(x-a)^2+(x-2b)^2+(x-3c)^2}{2(a^2+4b^2+9c^2)}$

Si: a + 2b + 3c= 1,5

a) 0
b) ½
c) 1/3
d) ¼
e) 1/6

58. Calcular: Q = x6 – 6x4 + 9x2 Cuando: x= $\sqrt[3]{\sqrt{7}-\sqrt{6}}+\sqrt[3]{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$

a) 28
b) 14
c) 26
d) 32
e) 36

59. Si: $a^2 + b^2 + c^2 = 2$; (a + b+ c)(1 +ab + ac + bc)=32; Calcular: a + b + c

a) 8
b) 6
c) 2
d) 4
e) 10

60. Si: ab -1=$\sqrt[3]{100}$ - $\sqrt[3]{10}$; a + b -1= $\sqrt[3]{10}$ hallar 3ab(a + b)

a) 34
b) 30
c) 32
d) 16
e) 33

ECUACIONES

IGUALDAD

Dos cantidades son iguales o equivalentes cuando tienen el mismo valor.

$(7+5)^2=144$ $(13)^2-(5)^2=144$ $\sqrt{20736}=144$
Entonces: $(7+5)^2=(13)^2-(5)^2=\sqrt{20736}=144$

Aunque que no se conozca el valor de x, x+23=69 también es una igualdad.

PROPIEDADES DE LA IGUALDAD

I-1 (Propiedad Reflexiva) $a=a$
I-2 (Propiedad Simétrica) $a=b \to b=a$
I-3 (Propiedad Transitiva) $(a=b) \wedge (b=c) \to a=c$
I-4 (Propiedad de la Adición) $(a=b)\wedge (c=d) \to a+c=b+d$
I-5 (Propiedad de la Sustracción) $(a=b)\wedge (c=d) \to a-c=b-d$
I-6 (Propiedad de la Multiplicación) $(a=b)\wedge (c=d) \to a\cdot c=b\cdot d$
I-7 (Propiedad de la División) $(a=b)\wedge (c=d\neq 0) \to (a)/c=(b)/d$
I-8 (Propiedad de la Sustitución) Cualquier expresión puede reemplazarse por una expresión equivalente en una igualdad, sin cambiar el valor de verdad de la ecuación.

ECUACIÓN

Una ecuación es una igualdad con una o varias incógnitas que se representan con letras. Las ecuaciones pueden ser fórmulas que se utilizan para encontrar una magnitud.

He aquí algunos ejemplos

1. $2x-3=4$
2. $x-5y=23$

3. $x^2-4=0$
4. $1/x+1/5=1/(x^2-1)$
5. $d=v\times t$ (Fórmula de la distancia, en términos de la rapidez y el tiempo)
6. $A=\pi r^2$ (Fórmula del área de un círculo, en términos de su radio)
7. $V=1/3\ \pi hr^2$ (Fórmula que calcula el volumen de un cono de radio r y altura h)

Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Estas ecuaciones se resuelven mediante la aplicación de ecuaciones equivalentes con operaciones elementales (suma, resta, multiplicación o división) a ambos miembros de la ecuación, hasta obtener el valor de la incógnita. Normalmente, tienen la forma estándar:
ax+b=c,en donde a,b y c son números reales,con a≠0

Ejemplos: Resuelva las ecuaciones dadas

a) $20x-14-11x=8-6x+2$
b) $8y-(6y-9)+(3y-2)=4-(7y-8)$
c) $10(z+1)+8-(z+5)(z-5)=-13z-(z-4)^2+8(2z-3)$
d) $1/3t\ (2-t/2)-2/3+1/4t\ (10-5t/3)=1/t\ (5+t/4)$
e) $1/(x^2+5x+6)-5/(x^2+3x+2)=3/(x^2+4x+3)$
f) $|6-3x|=9$
g) $8abcx - ab = 8abx + 1$ (a,b y c, constantes)
h) $a-(b+c)/x=d-(b-c)/x$ (a,b,c y d, constantes)

SISTEMAS DE ECUACIONES

Una ecuación lineal con dos incógnitas x y y es de la forma ***ax+by= c,*** donde a, b y c son constantes y a, b son diferentes de cero. Considerando dos ecuaciones de este tipo

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Se dice que hay un sistema de ecuaciones lineales simultáneas con dos incógnitas o un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Todo par de valores de x y y que satisfagan ambas ecuaciones simultáneamente recibe el nombre de solución del sistema.

En los siguientes ejemplos se ilustran los métodos más usuales para resolver sistemas de ecuaciones.

Resuelva el sistema por sustitución

$$\begin{cases} 2x - y = 4 & ❶ \\ x + 2y = -3 & ❷ \end{cases}$$

Solución: ❶ $y=2x-4$ ❷ $x+2(2x-4)=-3 \rightarrow x=1$
❶ $y=2(1)-4=-2$ Entonces la solución es $(1,-2)$.
Resuelva el sistema por eliminación

$$\begin{cases} 2x - y = 4 & ❶ \\ x + 2y = -3 & ❷ \end{cases}$$

Solución: ❶$\times 2$ y ❷$\times 1$ $\rightarrow$

$$\begin{cases} 4x - 2y = 8 & ❶ \\ x + 2y = -3 & ❷ \end{cases}$$

Sumando miembro a miembro: $5x=5 \rightarrow x=1$

❶ $y=2(1)-4=-2$ Entonces la solución es $(1,-2)$.

ECUACIÓN CUADRÁTICA

Una ecuación de segundo grado que implica la variable x tiene la forma generalizada: $ax^2+bx+c=0$

donde ***a,b y c*** son constantes, con la condición adicional de que ***a≠0.*** Normalmente se dice que las ecuaciones de segundo grado son ecuaciones cuadráticas. Este tipo de ecuaciones, en general, se resuelven con la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

EJEMPLOS

1. Resuelva la ecuación $3x^2-5x+2=0$

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = -5 \\ c = 2 \end{cases} \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)} = \left. \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{2}{3} \end{matrix} \right\}$$

Ejercicios Propuestos:

1. La suma de tres números enteros consecutivos es 312. Encuentra dichos números.

2. La diferencia de dos números es 17 y la suma de ambos es 451. Determina los números.

3. La suma de tres números enteros pares consecutivos es 276. Determina los números.

4. La suma de tres números enteros impares consecutivos es 45. Encuentra los números.

5. La diferencia de dos números es 36 y un medio del mayor excede en dos al menor. Determina los números.

6. La diferencia de dos números es 42 y los dos quintos del mayor equivalen al menor. ¿Cuáles son los números?

7. Un número excede en seis a otro y el doble del mayor equivale al triple del menor. Encuentra los números.

8. Un número excede en 4 a otro y la tercera parte del mayor equivale a la mitad del menor. Determina los números.
9. El exceso de un número sobre 20 es igual a las tres cuartas partes del mismo número. ¿Cuál es el número?

10. El exceso de 30 sobre un número es igual a las dos terceras partes del número, más 10 unidades. ¿Cuál es el número?

11. La suma de dos números es 10 y la diferencia de sus cuadrados es 40. ¿Cuáles son los números?

12. La suma de dos números y la diferencia de sus cuadrados es 11. ¿Cuáles son los números?

13. El cuadrado del exceso de 12 sobre un número, menos la mitad del número es igual al cuadrado del número, menos los trece medios del número. ¿Cuál es el número?

14. Un número es el doble de otro, si ambos se aumentan en 6, el triple del mayor equivale a cinco veces el menor. Encuentra los números.

15. Un número es la tercera parte de otro, si ambos se aumentan en 10, el mayor será el doble del menor. Determina los números.

16. La suma de tres números es 45, el mayor excede en 5 al mediano y en 10 al menor. Encuentra los números.

17. La suma de dos números es 60 y el mayor equivale cinco veces el menor aumentado en 30. Determina los números.

18. La suma de dos números es 23 y el doble del mayor excede en 6 al triple del menor. ¿Cuáles son los números?

20. Dos números están en la relación 3:4 y el mayor equivale al menor aumentado en 8. Determina los números.

21. La suma de los dígitos de un número de dos cifras es igual a 8. Si los dígitos se invierten, el número resultante excede en 11 a las seis quintas partes del número original. ¿Cuál es el número?
22. En un número de dos cifras, el dígito de las decenas excede en 2 al de las unidades. Si al número se resta 4, el resultado es el séxtuplo de la suma de sus dígitos. Determina el número.

23. En un número de dos cifras el dígito de las decenas es 4 menos que el dígito de las unidades. Si los dígitos se invierten, el número resultante es el triple más 6 del número original. Encuentra el número.

24. La suma de los dígitos de una cantidad de dos cifras es 9. Si los dígitos se invierten, el número que resulta excede en 9 al número original, ¿cuál es el número?

25. La cifra de las decenas de un número de dos cifras excede al de las unidades en 5 y las dos terceras partes de la suma de sus cifras es 6. ¿Cuál es el número?

26. La suma de los dígitos de un número de dos cifras es 11. Si el número supera en 5 al triple de la suma de sus dígitos, ¿cuál es el número?

27. La suma de los dígitos de un número de dos cifras es 9. Si se resta 18 al número formado al invertir el orden de los dígitos del número original, el resultado es la mitad del número original, determina el número.

28. En una cantidad de dos dígitos, el número que ocupa el lugar de las decenas es la mitad del dígito que ocupa el lugar de las unidades. El mismo número es igual a la suma de ocho veces el dígito de las decenas, más cuatro veces el de las unidades reducido en dos. ¿Cuál es la cantidad?

29. La suma de los dígitos de un número de dos cifras es 16 y el cociente del número original con el número que resulta al invertir los dígitos es uno, con un residuo de 18. ¿Cuál es el número?

30. En un número de dos cifras, el dígito de las unidades equivale a las 2/3 partes del dígito de las decenas. Si el número se divide entre la suma de sus dígitos, el cociente es 6 y el residuo 6, halla los números.
31. En un número de tres cifras, el dígito de las unidades excede en tres al de las centenas y la suma de los tres dígitos es 7. Si se invierten los dígitos de las decenas y las centenas el número resultante excede en 90 al original. Encuentra el número.
32. En un número de tres cifras, el dígito de las decenas excede en 2 al de las unidades y en 4 al de las centenas. Si se invierten el dígito de las unidades y el de las centenas, el número que resulta es 66 unidades menor que el doble del número original. ¿Cuál es el número?

33. En un número de tres cifras el dígito de las decenas es la mitad del dígito de las unidades, mientras que el de las centenas es el sucesor del dígito de las decenas. Si se intercambia el dígito de las decenas por el de las centenas el número obtenido es 44 unidades menor que treinta veces la suma de los dígitos. Determina el número.

34. Hubert heredó una determinada suma de dinero. El primer año gasta $100 y aumenta a lo que queda un tercio de este resto. Al año siguiente nuevamente gasta $100 y aumentó a la cantidad restante un tercio de ella; el tercer año de nuevo gasta $100 y aumentó un tercio de lo que quedaba. Si la suma resultante es el doble de lo heredado, ¿Cuánto heredó Hubert?

    a) $1500
    b) $1400
    c) $1480
    d) $2380
    e) $2000

35. Una lancha patrullera provista de una radio de 60 km de alcance parte de un puerto al encuentro de un barco, cuya velocidad es la quinta parte de la suya; cuando sus mensajes alcanzan al barco este responde que llegará al puerto dentro de 15 horas; la lancha regresa inmediatamente y puede anunciar la noticia al puerto por medio de su radio a 5 h después de su partida. Hallar la velocidad del barco.
    a) 60km/h
    b) 35km/h
    c) 36km/h
    d) 72km/h
    e) 70km/h

36. En una competencia hípica de 1000 m, el líder se desvía 90 m por lo que tiene que retornar al mismo punto del desvío por el mismo camino; en el momento de desviarse llevaba 20 m de ventaja al segundo y cuando lo vuelve a pasar está a 100 m de la meta, llegando 2 minutos antes de este. Hallar a qué distancia de la partida estaba el desvío.

    a) 160m
    b) 100m
    c) 20m
    d) 150m
    e) 200m

37. Al sumar los períodos de las fracciones propias x/135 y x/185 se obtiene 1177. Hallar la suma de cifras de x.

    a) 13
    b) 12
    c) 10
    d) 9
    e) 8

38. Una persona empieza con 256 dólares y apuesta 8 veces; ganando 4 veces, y perdiendo 4 veces, ocurriendo las ganancias y pérdidas en orden distinto, y en cada apuesta la ganancia o pérdida es igual a la mitad del dinero apostado en ese momento. Si cada apuesta es con todo el dinero que le queda en ese momento, ¿Cuál es el resultado final?

a) Pérdida de $170
b) Ganancia de $175
c) Pérdida de $175
d) Ganancia de $167
e) Faltan datos.

39. De un grupo de 120 alumnos, 70 prefieren los cursos "A" o "B" pero no ambos cursos a la vez. Los que no prefieren ninguno de dichos cursos, son el cuádruple de los que prefieren ambos cursos. ¿cuántos alumnos prefieren ambos cursos?

a) 10
b) 20
c) 40
d) 80
e) 100

40. En una biblioteca había 17 personas, de las cuales 8 leyeron la revista "A"; 9 la revista "B" y 7 leyeron ambas revistas. ¿Cuántos no leyeron ninguna revista?

a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 9

41. De 100 personas que leen por lo menos 2 de las revistas “A”, “B” y “C”, se observa que 40 leen las revistas “A” y “B”; 50 leen “B” y “C” y 60 “A” y “C”. ¿Cuántas personas leen las tres revistas?

a) 22
b) 23
c) 24
d) 25
e) 27

42. De un grupo de 50 personas, 30 hablan español, 25 hablan inglés, 30 hablan francés y 4 los tres idiomas. ¿Cuántas personas de grupo hablan al menos dos de estos idiomas, si todos hablan al menos uno de estos idiomas?

a) 16
b) 17
c) 14
d) 21
e) 20

43. En una encuesta realizada a 120 alumnos sobre cierta preferencia se obtuvo la respuesta “Si” de parte de 80 alumnos y “Por supuesto” respondieron 50 alumnos. ¿Cuántos alumnos no respondieron con las frases anteriores, si el número de alumnos que respondieron “Sí por supuesto” es la cuarta parte de los que dijeron “Sí” solamente?

a) 5
b) 6
c) 8
d) 10
e) 12

44. En un conjunto de 30 personas: 16 estudiaron en la universidad "C". Si solo dos personas estudiaron en las universidades "A", "B" y "C", ¿Cuántos estudiaron exactamente en una de estas universidades, considerando que todas las personas estudiaron al menos en una de dichas universidades?

a) 17
b) 18
c) 19
d) 20
e) 21

45. En una ciudad se determinó que el 46% de la población no lee la revista "A", que 60% no lee la revista "B" y el 58% lee "A" pero no ambas. Si 63 000 personas leen la revista "A" y "B", ¿Cuántas personas hay en la población?

a) 300 000
b) 320 000
c) 340 000
d) 350 000
e) 400 000

46. En un aula de clase formada por 42 alumnos se sabe que:

- 13 hombres aprobaron Geometría.
- 8 hombres aprobaron Trigonometría.
- 4 hombres y 6 mujeres no aprobaron ninguno de los dos cursos.
- 7 aprobaron los dos cursos
- 24 aprobaron Geometría
- Hay 24 hombres en el aula.

¿Cuántas mujeres aprobaron Geometría?

a) 1
b) 2
c) 4
d) 5
e) 7

47. En una estación de transporte había 100 personas de las cuales 40 hombres eran provincianos, 30 mujeres eran 1imeñas y el número de mujeres provincianas excede en 10 al número de hombres limeños. ¿Cuántos hombres hay en la estación?

a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 14

48. En un grupo de 60 estudiantes, 26 hablan francés y 12 solamente francés; 30 hablan inglés y 8 solamente inglés; 28 hablan alemán y 10 solamente alemán. También se sabe que 4 hablan los 3 idiomas mencionados. ¿Cuántos hablan inglés y alemán, pero no francés?

a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 14

49. El colegio organiza competencias de clasificación en los deportes de atletismo, gimnasia y box, hay deportistas inscritos en todas las disciplinas, de las cuales 200 participan en atletismo, 180 en gimnasia, 240 en box, 300 en atletismo o gimnasia, 40 en atletismo y gimnasia, pero no en box y 80 solo en box. ¿Cuántos deportistas participan en 3 deportes?

a) 20
b) 30
c) 40
d) 50
e) 60

50. De un grupo de 100 personas, 40 son mujeres, 73 estudian historia, 12 mujeres no estudian historia. ¿Cuántos hombres no estudian historia?
    a) 13
    b) 10
    c) 15
    d) 25
    e) 12

51. En una fiesta donde había 70 personas, 10 eran hombres que no les gustaba la música salsa, 20 eran mujeres que gustaban de esta música. Si el número de hombres que gusta de la música salsa es la tercera parte de las mujeres que no gusta de esta música, ¿a cuántos les gusta la música salsa?

    a) 10
    b) 20
    c) 30
    d) 40
    e) 50

52. De 65 personas que leen por lo menos 2 de 3 diarios se observa que: 27 personas leen "El Popular" y la "República"; 35 personas leen "Ojo" y la "República" y 33 personas leen "EL Popular " y "Ojo". ¿Cuántas personas leen "¿Ojo", "La República" y "El Popular"?

    a) 10
    b) 15
    c) 20
    d) 25
    e) 28

53. En un baile social se supo que el 45% solicitan salsa; el 35% solicitan baladas y el 30% solicitan rock; además, el 15% pedían salsa y baladas; y el 16%, baladas y rock; el 20%, salsa y rock; y el 8% los tres ritmos. ¿Qué porcentaje de los asistentes no pedía ninguno de los ritmos mencionados?

a) 67%
b) 57%
c) 37%
d) 33%
e) 43%

54. En un aula de 35 alumnos, 7 aprobaron Aritmética, 6 hombres aprobaron literatura, 5 hombres y 8 mujeres no aprobaron ningún curso. Hay 16 hombres en total, 5 aprobaron los 2 cursos, 11 aprobaron solo Aritmética. ¿Cuántas mujeres aprobaron solo literatura?
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

55. De un grupo de 300 personas, 180 conocen Cusco; 160 conocen Arequipa; 20 no conocen Cusco ni Arequipa. ¿Cuántos conocen una sola ciudad?

a) 220
b) 210
c) 200
d) 180
e) 190

56. María dice "Dentro de 16 años mi edad será 3 veces mayor que la edad que tenía hace 14 años". ¿Qué edad tengo?

a) 16 años
b) 34 años
c) 24 años
d) 38 años
e) 32 años

57. A Simón le preguntaron por su edad y él responde: "Si a mi edad le suman el triple de la edad que tuve hace 4 años, más la edad que tendré dentro de 4 años obtendrán mi edad más 28 años" ¿Cuál es la edad de Simón?

a) 20 años
b) 15 años
c) 9 años
d) 10 años
e) 12 años

58. Hace exactamente cinco años ocurrió lo siguiente: Nuestras edades estaban en la relación de 2 a 3. Si dentro de 15 años la diferencia de nuestras edades será 14 años, ¿Qué edad tenías tú hace 10 años si eres mayor que yo?

a) 23 años
b) 25 años
c) 24 años
d) 37 años
e) 38 años

59. Los años que tú tendrás dentro de 12 años son a los que ahora tengo como 7 es a 5. Si actualmente mi edad excede a tu edad en 4 años, ¿Cuántos años tenemos entre los dos?

a) 32
b) 42
c) 36
d) 40
e) 39

60. La edad de un padre y su hijo suman 90 años; el hijo nació cuando el padre tenía 36 años. ¿Cuántos años deben transcurrir para que la edad del padre sea el doble de la edad de su hijo?

a) 18
b) 14
c) 10
d) 9
e) 12

61. Dentro de 10 años tú tendrás la edad que yo tenía cuanto tú tenías la edad que yo tuve hace 34 años. ¿Cuántos años tengo?, si la suma de nuestras edades es 110 años

a) 52
b) 48
c) 34
d) 32
e) 56

62. Dentro de 15 años, la edad de Luis será el doble de la edad de Liliana. Si hace 6 años la edad de Luis era el triple de la edad de Liliana, dar como respuesta la suma de las edades actuales de ambos.

a) 92 años
b) 85 años
c) 83 años
d) 96 años
e) 93 años

63. Shirley comenta: "Armando, sabes bien que tú tenías el triple de mi edad cuando nos conocimos y que yo tengo ahora exactamente la misma edad que tú tenías en ese entonces y que cuando yo tenga tres veces mi edad actual nuestras edades sumarán 100 años" ¿Cuál será la edad de Armando dentro de 4 años?

a) 29 años
b) 24 años
c) 16 años
d) 18 años
e) 21 años

64. Anita le dice a José: "Dentro de 10 años yo tendré el doble de la edad que tú tendrás". Él responde: "Sí, pero hace cinco años tu edad era el quíntuple de la edad que yo tenía". Si él nació en 1992, ¿en qué año nació Anita?

a) 1970
b) 1968
c) 1970
d) 1972
e) 1905

65. Cindy comenta: "Hoy tengo 10 años menos de la edad que mi padre tenía cuando yo nací, además las dos últimas cifras del año de nacimiento de mi padre son iguales a las dos últimas cifras del año actual, pero en orden invertido". Si el año actual es mayor que 1990, entonces, ¿en qué año su padre tuvo 23 años si el próximo año ella cumplirá esa edad?

a) 1962
b) 1970
c) 1978
d) 1979
e) 1980

66. Mario nació en 19ab y en el 2001 tiene una edad igual a la suma de cifras de su año de nacimiento, ¿Qué edad tiene Mario?

a) 32 años
b) 31 años
c) 24 años
d) 22 años
e) 28 años

67. Sonia le dice a Sandra: "Tú tienes 18 años, pero cuando tú tengas la edad que yo tengo, la suma de nuestras edades será 48 años". ¿Qué edad tendrá Sonia dentro de 8 años?

a) 20 años
b) 30 años
c) 31 años
d) 28 años
e) 26 años

68. Una herencia de 288 dólares debe repartirse entre tres hermanos en forma proporcional a sus edades. El menor se opone al reparto actual y propone hacer el reparto dentro de 8 años ya que recibirá 8 dólares más. Sin embargo, el mayor no está de acuerdo ya que recibirá 8 dólares menos. Hallar las edades actuales de los tres y dar como respuesta el promedio de los dos mayores.

a) 18 años
b) 17,5 años
c) 16,5 años
d) 19 años
e) 20 años

PARTE 5
ESTADÍSTICA

La estadística es la ciencia que recoge, organiza, presenta, analiza e interpreta datos con el fin de facilitar la toma de decisiones más eficaces.

Ejemplo:
¿Cuál de los siguientes conceptos no está incluido en la definición de Estadística?

(a) Colección.
(b) Organización.
(c) Presentación.
(d) Interpretación.

Clasificación

Existen dos clases de estadística:

La estadística descriptiva que consiste en un conjunto de procedimientos para organizar y resumir datos.

La estadística inferencial implica tomar una muestra de una población y llevar a cabo cálculos relativos a ésta sobre la base de los resultados de la muestra.

Ejemplo:
Una compañía de conservas pidió a una muestra de 300 consumidores que probaran un nuevo jamón producido por dicha empresa, y denominado «La Española». De los 300 consumidores consultados, 197 dijeron que comprarían el jamón si se pusiera a la venta. ¿Se trata de un ejemplo de?

(a) ¿Estadística Descriptiva?
(b) ¿Estadística Inferencial?
(c) ¿Ninguna de las dos Estadísticas?
(d) ¿Ambas Estadísticas?

Una población es un conjunto de individuos u objetos de interés o las medidas obtenidas de todos los individuos u objetos de interés.

Una muestra es una parte de la población.

Ejemplos:

1. Cuando se les pregunta a las personas sobre qué marca de refresco de cola prefiere, la mayoría responde Coca-Cola en lugar de Pepsi-Cola, Big Cola, Orangine o Fruit. ¿Se llegó a esta conclusión a partir de una:

(a) ¿Muestra?
(b) ¿Población?

2. El 75% de los autos vendidos en Ecuador en el 2010, fue armado en Japón. ¿Se llegó a esta conclusión a partir de una:

(a) ¿Muestra?
(b) ¿Población?

TIPOS DE VARIABLES

Existen dos tipos de variables.

Una variable cualitativa es de naturaleza no numérica. Por lo común lo que interesa es el número o porcentaje de observaciones en cada categoría. Los datos cualitativos se reúnen en gráficas y diagramas de barras.

Existen dos tipos de variables cuantitativas, que se presentan de forma numérica. Las variables discretas toman ciertos valores, y existen vacíos entre éstos. Una variable continua adopta cualquier valor dentro de un intervalo específico.

Ejemplos:

1. La edad, los ingresos, la altura y el peso de las personas son ejemplos de
   - (a) Variables de población.
   - (b) Variables cualitativas.
   - (c) Variables aleatorias.
   - (d) Variables cuantitativas.

2. Indique qué variables son cualitativas y cuáles cuantitativas:
   - (a) Comida Favorita.
   - (b) Profesión que le gusta.
   - (c) Número de goles marcados por su equipo favorito en la última temporada.
   - (d) Número de alumnos de su Universidad.
   - (e) El color de los ojos de sus compañeros de clase.
   - (f) Coeficiente intelectual de sus compañeros de clase.

Cuantitativas: ____

Cualitativas: ____

TABLA DE FRECUENCIAS

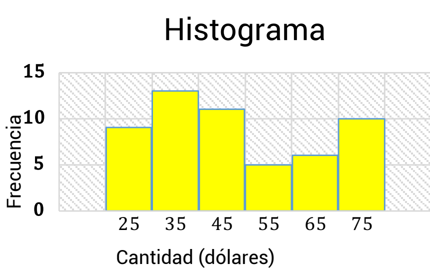
Una tabla (distribución) de frecuencias es una agrupación de datos cualitativos en clases mutuamente excluyentes, que muestra el número de observaciones que hay en cada clase.

- La frecuencia de clase es el número de observaciones que hay en cada clase.
- El intervalo de clase es la diferencia entre los límites de dos clases consecutivas.
- La marca de clase es el punto medio entre los límites superior e inferior de la clase.

Clases (dólares)	Marca de clase (M)	Frecuencias absolutas		Frecuencias relativas	
		Simple	Acumulada	Simple (%)	Acumulada (%)
20 – 30	25	9	9	16,67	16,67
30 – 40	35	13	22	24,07	40,74
40 – 50	45	11	33	20,37	61,11
50 – 60	55	5	38	9,26	70,37
60 – 70	65	6	44	11,11	81,48
70 – 80	75	10	54	18,52	100,00
Total		54		100,00	

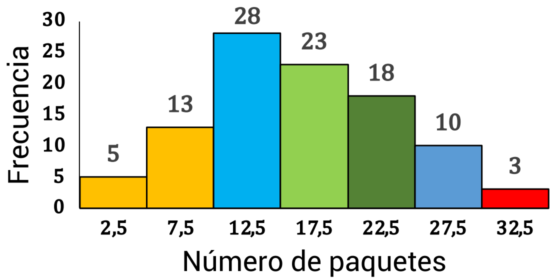
HISTOGRAMA

Un histograma representa en forma de rectángulo el número de frecuencias en cada clase.



Ejemplos:

1. Un distribuidor de caramelos tiene varias tiendas al menudeo en varias ciudades del país. Muchos de los clientes quieren que se les envíen sus pedidos. La gráfica siguiente muestra el número de paquetes que envió diariamente en los últimos 100 días.



a) ¿Cómo se llama la gráfica?
b) ¿Cuál es el número total de frecuencias?
c) ¿Cuál es el intervalo de clase?
d) ¿Cuál es la frecuencia de clase de [10,15[?
e) ¿Cuál es la frecuencia relativa de clase de [20,25[?
f) ¿Cuál es límite superior de la sexta clase?
g) ¿En cuántos días se enviaron 25 paquetes o más?

La siguiente distribución representa el número de días en que los empleados de la compañía industrial E & P estuvieron ausentes por enfermedad, durante el año pasado.

Número de días ausentes	Número de empleados
0 – 3	5
3 – 6	12
6 – 9	23
9 – 12	8
12 – 15	2

(a) Suponiendo que lo anterior es una muestra, ¿cuál es su tamaño?
(b) ¿Cuál es la marca de clase de la cuarta clase?
(c) ¿Cuántos empleados estuvieron ausentes menos de 3 días al año?
(d) ¿Cuántos empleados estuvieron ausentes 9 o más días al año?

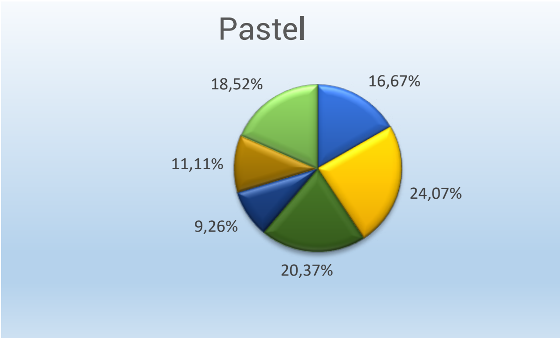
3. Un minorista estudia el tiempo de surtimiento (tiempo que transcurre entre la elaboración de un pedido y la entrega de este) para una muestra de órdenes recientes. Los tiempos de surtimiento se reportan en días.

Tiempo de surtimiento (días)	Frecuencia
0 hasta 5	6
5 hasta 10	7
10 hasta 15	12
15 hasta 20	8
20 hasta 25	7

(a) ¿Cuántos pedidos se estudiaron?
(b) ¿Cuál es el punto medio de la tercera clase?
(c) ¿Cuáles son las coordenadas de la segunda clase para un polígono de frecuencias?
(d) ¿Cuántos pedidos se entregaron en menos de 15 días?

Gráficas de Pastel

Una gráfica de pastel muestra la parte que cada diferente clase representa del número total de frecuencias.



Ejemplo: Cybernet.com realiza una prueba de mercado de su nuevo sitio web y le interesa saber con qué facilidad se navega en su diseño de página web. Selecciona al azar a 200 usuarios frecuentes de internet y les pide que lleven a cabo una tarea de investigación en la página web. A cada individuo le solicita que califique la relativa facilidad para navegar como mala, buena, excelente o sobresaliente. Los resultados aparecen en el siguiente pastel:

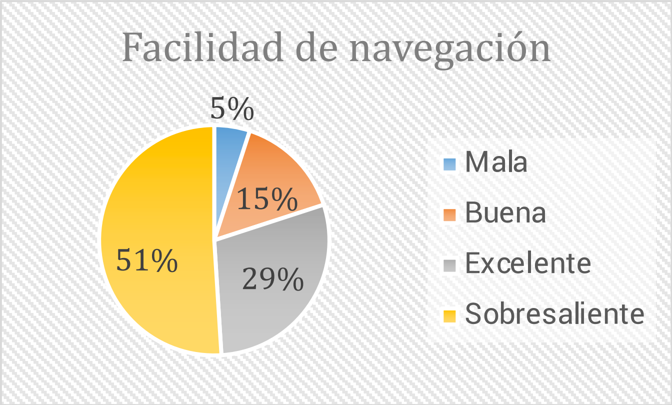


DIAGRAMA DE TALLO Y HOJAS

Un diagrama de tallo y hojas constituye una alternativa al histograma.
• El dígito principal es el tallo y el dígito secundario, la hoja.

• Las ventajas de un diagrama de tallo y hojas sobre un histograma incluyen las siguientes:

- o La identidad de cada observación no se pierde.
- o Los dígitos mismos proporcionan una representación de la distribución.

Ejemplo:

1. La siguiente gráfica de tallo y hojas muestra el número de películas vendidas por día en la empresa VIDEO AMIGO.

12	6 8 9
13	1 2 3
14	6 8 8 9
15	5 8 9
16	3 5
17	2 4 5 6 8
18	2 6 8
19	1 3 4 5 6
20	0 3 4 6 7 9
21	2 2 3 9
22	7 8 9
23	0 0 1 7 9
24	8
25	1 3
26	
27	0

(a) ¿Cuántos días se registraron?
(b) ¿Cuántas observaciones hay en el último renglón?
(c) ¿Cuál es el número mínimo de películas vendidas?
(d) ¿Cuál es el número máximo de películas vendidas?
(e) ¿Cuáles son los valores reales del penúltimo renglón?
(f) ¿En cuántos días se vendieron menos de 150 películas?
(g) ¿En cuántos días se vendieron 230 películas o más?
(h) ¿Existe un dato intermedio?
(i) ¿Cuántos días se vendieron entre 150 y 200 películas?
(j) ¿Qué día no se vendió ninguna película?

MEDIDAS DE UBICACIÓN

Una medida de ubicación es un valor que sirve para describir el centro de un conjunto de datos.

La media aritmética es la medida de ubicación que más se informa. Se calcula sumando los valores de las observaciones y dividiendo entre el número total de observaciones.

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

Ejemplos:

1. El ingreso mensual en dólares para una muestra de varios empleados de una institución educativa a nivel medio es: 921, 950, 748, 765, 497, 328, 765, 692, 765, 583.

   (a) Determine la media aritmética

2. Determine el valor de x si, **4x+1** es la media aritmética de **x+1, y 8x-1.**

La mediana es el valor que se encuentra en medio de un conjunto de datos ordenados. Para determinar la mediana, se ordenan las observaciones de menor a mayor y se identifica el valor intermedio.

1. El ingreso mensual en dólares para una muestra de varios empleados de una institución educativa a nivel medio es: 921, 950, 748, 765, 497, 328, 765, 692, 765, 583.

   (a) Establezca la mediana.

La moda es el valor que se presenta con mayor frecuencia en un conjunto de datos.

1. El ingreso mensual en dólares para una muestra de varios empleados de una institución educativa a nivel medio es: 921, 950, 748, 765, 497, 328, 765, 692, 765, 583.

   (a) Calcule la moda.

PROBABILIDAD

Una probabilidad es un valor entre 0 y 1, inclusive, que representa las posibilidades de que cierto suceso ocurra.

$$P(Suceso) = \frac{número\ de\ resultados\ favorables}{número\ total\ de\ resultados}$$

Ejemplo: Una caja contiene 10 bolas de color rojo, 30 de color blanco, 20 azul y 15 naranja. Se saca una bola. Hallar la probabilidad de que:

a) Sea roja.
b) Sea blanca.
c) Sea azul.
d) Sea naranja.
e) No sea naranja.

Existen tres reglas de conteo útiles para determinar el número de resultados de un experimento.

La regla de la multiplicación establece que si hay m formas de que un evento suceda y n formas de que otro pueda suceder, entonces hay m×n formas en que los dos eventos pueden suceder.

$$\text{Número de arreglos} = (\text{m})(\text{n})$$

Ejemplo: Hay 6 carreteras entre las ciudades A y B y 4 carreteras entre las ciudades B y C.

a) ¿De cuántas maneras se puede viajar de A a C, pasando por B?
b) ¿De cuántas maneras se puede hacer el viaje de ida y vuelta de A a C pasando por B?
c) ¿De cuántas maneras se puede hacer el viaje de ida y vuelta de A a C sin usar la misma carretera más de una vez?

PERMUTACIÓN Y COMBINACIÓN

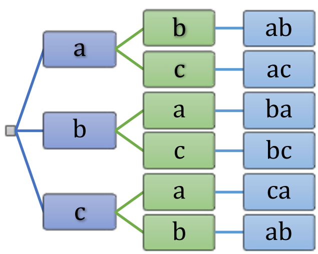
Una permutación ***n*** objetos, distintos de un conjunto, tomados de ***r*** en ***r*** es una selección ordenada de ***r*** objetos de entre ***n***. El número de permutaciones de ***n*** objetos tomados de ***r*** en ***r***, se simboliza por $_nP_r$ y viene dado por:

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Así por ejemplo, el número de permutaciones que se pueden formar con las letras del conjunto $\{a,b,c\}$, tomadas de dos en dos, es:

$$_3P_2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$$

Se muestran a continuación, con un diagrama de árbol:



Por lo tanto, las seis permutaciones son: **ab,ac,ba,bc,ca,cb**

Ejemplo:

A. ¿De cuántas maneras distintas se pueden ordenar 5 personas en una fila?
B. Encuentre el número de formas como se pueden colocar en fila los 4 cuadros de una colección que se compone de 12 pinturas.

Una combinación de ***n*** objetos distintos, de un conjunto, tomados de ***r*** en ***r*** es un subconjunto de ***r*** objetos de entre ***n***. El número de combinaciones de ***n*** objetos tomados de ***r*** en ***r***, se simboliza por ${}_nC_r$ y viene dado por:

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Por ejemplo, el número de combinaciones que se pueden formar con las letras {a,b,c}, tomadas de dos en dos, es:

$${}_3C_2 = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = 3$$

Por lo tanto, las tres combinaciones son: {a,b},{a,c},{b,c}

Ejemplos:

A. ¿Cuántos grupos de 4 alumnos se pueden formar con 17 alumnos aventajados para representar a un colegio en un concurso de preguntas de matemáticas?
B. ¿De cuántas maneras se pueden elegir 5 idiomas entre 8?

Ejercicios Propuestos

1. Decir de las variables siguientes cuáles son discretas y cuáles continuas.

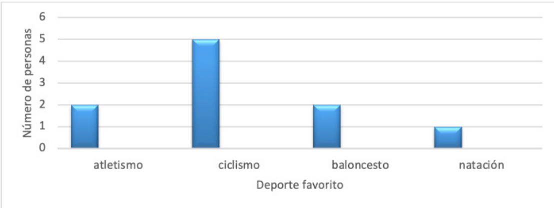
a) Temperaturas registradas cada media hora en un observatorio.
b) Peso de las cajas registradas en un contenedor.
c) Número de billetes de veinte dólares circulando a la vez

en Ecuador.
d) Estudiantes matriculados en la PUCE-SI en un este semestre.
e) Velocidad de un automóvil en kilómetros por hora.
f) Número de libros en un estante de librería.
g) Países de Europa.
h) Número de galones de gasolina en un tanque de automóvil.
i) Longitud de un cuarto.
j) Suma de puntos obtenidos en el lanzamiento de un par de dados.
k) Número de kilogramos de trigo producidos por hectárea en una granja en un determinado número de años.
l) Número de individuos de una familia.
m) Tiempo de vuelo de un avión.
n) Estado civil de un individuo.
o) Número de pétalos de una flor.

2. Ubique las variables en la siguiente tabla de clasificación.
a) Salario.
b) Género.
c) Volumen de ventas de reproductores de MP3.
d) Preferencia por los refrescos.
e) Temperatura (Co)
f) Lugar que ocupa un estudiante en clase, en lo que a rendimiento académico se refiere.
g) Cantidad de computadoras domésticas.

	Cualitativa	Cuantitativa
Nominal		
Ordinal		
Discreta		
Continua		

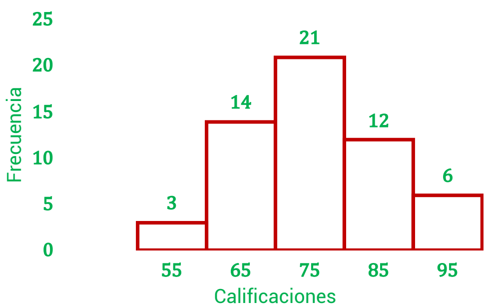
3. A partir de la siguiente gráfica de barras sobre los gustos deportivos:



¿A qué porcentaje de las personas no le gusta el ciclismo?

4. La figura siguiente, es un histograma que muestra las calificaciones de un primer examen de estadística de un curso.

(a) ¿Cuántos estudiantes hicieron el examen?
(b) ¿Cuál es el intervalo de clase?
(c) ¿Cuál es la marca de clase para la primera de ellas?
(d) ¿Cuántos estudiantes obtuvieron una calificación menor que 70?



5. En la tabla siguiente, se muestra una distribución de frecuencias de salarios anuales.

Salario anual	Número de obreros
2400 – 2600	7
2600 – 2800	20
2800 – 3000	33
3000 – 3200	25
3200 – 3400	11
3400 – 3600	4

(a) ¿Cuántos obreros participaron?
(b) ¿Cuál es el intervalo de clase?
(c) ¿Cuál es la marca de clase de la primera clase?
(d) ¿Cuál es la marca de clase de la quinta clase?
(e) ¿Cuántos obreros ganan menos de $2800 al año?
(f) ¿Cuántos obreros ganan más de $3000 al año?
(g) ¿Cuántos obreros ganan entre $2600 y $2999 al año?

6. La figura siguiente, es una representación de tallo y hojas muestra el número de unidades producidas por día en una fábrica.

3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

(a) ¿Cuántos días se estudiaron?
(b) ¿Cuántas observaciones hay en la primera clase?
(c) ¿Cuáles son el valor más pequeño y el valor más grande?
(d) Indique los valores reales en el cuarto renglón.
(e) Indique los valores reales en el segundo renglón.
(f) ¿Cuántos valores son inferiores a 70?
(g) ¿Cuántos valores son iguales o superiores a 80?
(h) ¿Cuál es el valor intermedio?
(i) ¿Cuántos valores hay entre 60 y 89 inclusive?

7. El ingreso anual en dólares para un grupo de varios empleados de una institución educativa a nivel medio es: 6290, 6910, 5830, 4920, y 3680 Obtenga la media de la muestra.

8. Los estudiantes de un curso de ciencias de la computación tienen los siguientes registros de calificaciones: 9,2, 9,6, 6,1, 8,6, 7,9 y 8,4. Determine la calificación media del curso.

9. Dados los siguientes valores: 5,9, 4, 10. Determine la media.

10. La media de tres datos es 10, si dos de los datos son 15 y 12, ¿Cuál es el tercer dato?

11. La tabla siguiente es una representación de tallo y hojas del número de unidades producidas por día en una fábrica.

3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

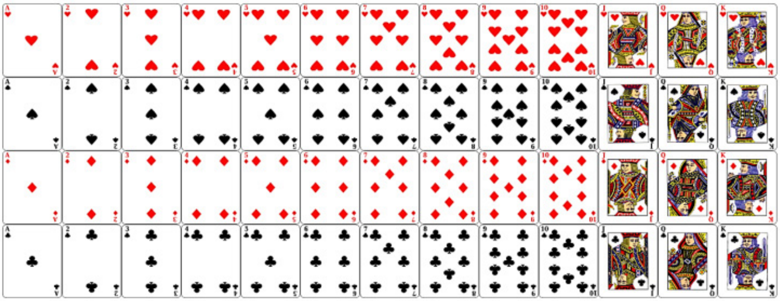
Determine la media, la mediana y la moda del número de unidades producidas.

12. Ante un examen, un alumno sólo ha estudiado 15 de los 25 temas correspondientes a la materia de este. Él examen se realiza en trayendo al azar dos temas y dejando que el alumno escoja uno de los dos para ser examinado del mismo. Hallar la probabilidad de que el alumno pueda elegir en el examen uno de los temas estudiados.

13. Una urna contiene 5 bolas rojas y 8 verdes. Se extrae una bola. Se pide calcular la:

(a) Probabilidad de que la bola sea verde.
(b) Probabilidad de que la bola sea roja.

14. Calcule la probabilidad de que al seleccionar una carta de una baraja de 52 cartas:



La carta sea:

a) Una figura {J,Q,K}.
b) Un as {A}.
c) Una jota negra.
d) Una carta roja.

15. Al lanzar dos dados:

	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Calcule la probabilidad de obtener:

(a) un total de 7 puntos.
(b) un total de 10 puntos.
(c) un total de 2 puntos.
(d) un total de 13 puntos.

16. Una encuesta de 34 estudiantes en una Escuela mostró que éstos tienen las siguientes especialidades:

Contabilidad	10
Finanzas	5
Economía	3
Administración	6
Marketing	10

Suponga que elige a un estudiante y observa su especialidad.
(a) ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante tenga una especialidad en administración?
(b) ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante tenga una especialidad en Contabilidad?

17. Una compañía grande que debe contratar un nuevo presidente prepara una lista final de cinco candidatos, todos los cuales tienen las mismas cualidades. Dos de los candidatos son miembros de un grupo minoritario. Para evitar que el prejuicio influya al momento de elegir al candidato, la compañía decide elegir al presidente por sorteo. ¿Cuál es la probabilidad de que uno de los candidatos que pertenece a un grupo minoritario sea contratado?

18. Una muestra de 40 ejecutivos de la industria del petróleo se eligió para someterse a prueba un cuestionario. Una pregunta relacionada con cuestiones ambientales requería un sí o un no. Diez de los 40 ejecutivos respondieron que sí. ¿Cuál es la probabilidad de que un ejecutivo de la industria del petróleo responda que sí?

19. Una muestra de 2 000 conductores con licencia reveló la siguiente cantidad de violaciones al límite de velocidad.

Cantidad de violaciones	Cantidad de conductores
0	1 910
1	46
2	18
3	12
4	9
5 o más	5
Total	2 000

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un conductor haya cometido dos violaciones al límite de velocidad?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que un conductor no haya cometido violación alguna al límite de velocidad?

20. Un encuestador seleccionó en forma aleatoria a 4 de 10 personas disponibles. ¿Cuántos diferentes grupos de 4 es posible formar?

21. Un representante de una compañía constructora piensa seleccionar muestras de 10 terrenos. El director tiene 15 terrenos de los cuales el representante puede recoger las muestras. ¿Cuántas diferentes muestras son posibles?

22. Un encuestador nacional ha formulado 15 preguntas diseñadas para medir el desempeño del presidente de Ecuador. El encuestador seleccionará 10 de las preguntas.
    a) ¿Cuántas distribuciones de las 10 preguntas se pueden formar tomando en cuenta el orden?
    b) ¿Cuántas distribuciones de las 10 preguntas se pueden formar sin tomar en cuenta el orden?

23. En un país, las placas tienen tres letras seguidos de cuatro números. ¿Cuántas diferentes placas son posibles? Los dígitos disponibles son

$$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

Las letras disponibles son

$$\{A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L,M,N,O,P,Q,R,S,T,U,V,W,X,Y,Z\}$$

24. La contraseña de una computadora consta de cuatro caracteres. Los caracteres pueden ser una de las 26 letras del alfabeto. Cada caracter se puede incluir más de una vez. ¿Cuántas diferentes contraseñas puede haber?

25. ¿Cuántos números de 5 cifras diferentes se puede formar con los dígitos: **{1,2,3,4,5}**?

26. ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse ocho personas en una fila de butacas?

27. Con las letras de la palabra libro, ¿cuántas ordenaciones distintas se pueden hacer que empiecen por vocal?

28. Determine el número de triángulos diferentes que se pueden formar uniendo los seis vértices de un hexágono.

29. ¿De cuántas maneras se pueden elegir 3 mujeres de entre un grupo de 15?

30. ¿De cuántas maneras se pueden sentar seis personas en un banco?

31. Encuentre el número de señales distintas que se pueden hacer con cuatro banderas de colores diferentes desplegando dos banderas una encima de la otra.

32. Encuentre el número de señales distintas que se pueden realizar con seis banderas de colores diferentes desplegando tres banderas una encima de la otra.

33. ¿De cuántas maneras se puede elegir un presidente, un secretario y un tesorero en un club formado por 12 miembros?

34. En una pared está clavadas cuatro perchas. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colgar de ellas 3 chaquetas, una en cada percha?

35. Calcule cuántos números de dos cifras distintas se pueden formar con los dígitos 0, 3, 5, 7 sin que se repita cualquiera de los números.

36. En cierto sistema digital se utilizan cuatro letras diferentes {P,R,S,T} y los cuatro números {3,5,7,8} para construir códigos. Encuentre el número de códigos de que puede constar dicho sistema, sabiendo que cada uno está formado por una letra seguida de un número de cuatro cifras distintas.

37. Un alumno tiene que escoger 5 preguntas de entre 9. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?

38. ¿Cuántas sumas diferentes de dinero se pueden formar tomando dos monedas de entre las siguientes: un centavo, 5 centavos, 10 centavos, 25 centavos y 50 centavos de dólar?

39. ¿Cuántas sumas diferentes de dinero se pueden formar con las siguientes monedas: un centavo, 5 centavos, 10 centavos, 25 centavos y 50 centavos de dólar?

40. ¿Cuántas jugadas distintas se pueden presentar al lanzar tres dados?

Ejercicios Probabilidad

1. Diez personas participan en una competencia atlética de 400 metros planos. Si tres de los diez participantes son de la misma delegación, ¿Cuál es la probabilidad que ocupen los tres primeros lugares?
    a. ¼
    b. 1/10
    c. 1/12
    d. 3/100
    e. 1/120

2. Una ficha, cuyas caras están marcadas con los números 3 y 4, es lanzada 3 veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un total de 11?
    a. ¼
    b. 2/3
    c. 3/8
    d. ½
    e. 1/8

3. Tres amigos: Walter, Alfredo y Américo intervienen en una prueba. Walter y Américo tienen la misma probabilidad de ganar y es el doble de la que tiene Alfredo. Halle la probabilidad de que gane la prueba Walter o Alfredo.
    a. 1/5
    b. 2/5
    c. 3/5
    d. 4/5
    e. 2/25

4. De una baraja de naipes se extraen al azar tres cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres cartas sean del mismo palo?
    a. 2/17
    b. 11/17
    c. 11/25
    d. 2/25
    e. 22/17 x25

5. Una bolsa contiene 4 bolas blancas y 2 negras; otra bolsa contiene 3 bolsas blancas y 5 negras. Se extrae una bola de cada bolsa. Determine la probabilidad de que ambas sean blancas.
    a. 2/3
    b. 3/8
    c. ½
    d. ¼
    e. 1/3

6. Cinco personas se van a sentar en fila y al azar. Si entre ellos se encuentra Walter y Alfredo, ¿Cuál es la probabilidad que Alfredo se siente a ala derecha de Walter?
    a. 1/3
    b. ¼
    c. 1/5
    d. ½
    e. 2/3

7. En un concurso de matemáticas participan 7 mujeres y 8 hombres. Si debe haber dos ganadores, ¡cual es la probabilidad de que los ganadores sea un hombre y una mujer?
    a. 2/15
    b. 3/10
    c. 2/11
    d. 4/15
    e. 8/15

8. Se le pide a Julia que pinte un cuadrado en la siguiente figura, ¿Cuál es la probabilidad de que pinte un cuadrado de 2cm de lado?
    a. 2/9
    b. 2/7
    c. 4/7
    d. 5/9
    e. 5/14

9. En una bolsa se tienen 5 caramelos de fresa, 4 de limón y 2 de naranja. Si extraemos 3 caramelos al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que haya uno de cada sabor?
    a. 1/6
    b. 5/7
    c. 2/11
    d. 3/5
    e. 3/8

10. En un jardín de infancia hay 6 niños y 4 niñas. Si se escogen 3 estudiantes al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que sean niñas?
    a. 1/60
    b. 1/70
    c. 1/80
    d. 1/30
    e. 1/20

11. Dos burros se distribuyen al azar en 3 corrales denominados A, B, C, pudiendo estar ambos burros en un mismo corral. ¿Cuál es la probabilidad de que el corral B quede vacío?

    a. 1/9
    b. 2/9
    c. 8/9
    d. 4/9
    e. 5/9

12. En una carpeta se va a ubicar 4 hombres y 3 mujeres al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que las 3 mujeres se ubiquen juntas y en el centro?
    a. 2/5
    b. 3/35
    c. 1/35
    d. 1/6
    e. 4/35

13. Se le pide a Evelyn que escriba un número de 3 cifras. ¿Cuál es la probabilidad que escriba un número 5?
    a. 1/5
    b. 2/5
    c. 3/5
    d. 2/3
    e. 1/3

14. Se tiene un dado cargado de tal modo que los números pares tienen doble posibilidad de salir. Si lanzamos el dado, ¿Cuál es la posibilidad de que salga un número mayor que 3?
    a. 1/3
    b. 5/9
    c. 5/7
    d. 2/3
    e. 5/8

15. ¿Cuántos grupos de 5 personas se pueden formar con todos los asistentes de modo que 3 sean hombres y 2 mujeres?

    a. 10
    b. 40
    c. 60
    d. 15
    e. 80

16. Juan juega a la ruleta con Jorge. La probabilidad que tiene de ganar una partida es de 1/3. ¿Cuál es la probabilidad que tiene juan de ganar cuando menos una de tres partidas consecutivas?

    a. 2/3
    b. 1/9
    c. 3/13
    d. 19/27
    e. 13/25

17. Se efectúan tres lanzamientos consecutivos de una misma moneda. Determinar la probabilidad de obtener sello, cara y sello; en ese orden.

    a. ½
    b. 1/3
    c. 1/8
    d. ¾
    e. 2/5

18. Tres caballos pura sangre intervienen en una carretera. A tiene el doble de probabilidad de ganar que B pero la cuarta parte de C. ¿Cuál es la probabilidad de ganar A?

    a. 2/11
    b. 3/11
    c. 4/11
    d. 5/11
    e. 8/11

19. La probabilidad de que Johan compre un caramelo es 0,4 y de que compre un chocolate 0,5. ¿Cuál es la probabilidad de que compre las 2 cosas si la probabilidad de que no compre ninguna de ellas es 0,3?

    a. 0,1
    b. 0,2
    c. 0,3
    d. 0,4
    e. 0,5

20. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de puntos sea 6 al lanzar dos dados?

    a. 7/35
    b. 1/9
    c. 1/3
    d. 5/36
    e. 1/6

21. Al lanzar dos dados, ¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma de puntos menor a 5?

    a. ¼
    b. 1/9
    c. 1/18
    d. 1/6
    e. N.A.

22. Si se efectúa un lanzamiento de una moneda, ¿Cuál será la probabilidad de no obtener el sello?

    a. 1/3
    b. 2/3
    c. ½
    d. 1/8
    e. N.A.

23. Al lanzar tres monedas al aire, ¿Cuál es la probabilidad de obtener 2 caras y un sello?

    a. ¼
    b. 3/8
    c. ¾
    d. 1/8
    e. N.A.

24. Al arrojar tres dados, ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 3, un 4 y un 5 en ese orden?

    a. 1/6
    b. 1/12
    c. 1/36
    d. 1/216
    e. N.A.

25. Se tiene 10 fechas numeradas del cero al nueve, ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer dos fichas al azar , los dígitos en estas sumen un número par?

    a. 2/9
    b. 1/9
    c. ¼
    d. 4/9
    e. N.A.

26. ¿Cuál es la probabilidad de obtener por lo menos 11 puntos en tres tiradas con dos dados?

    a. 989/5832
    b. 919/5848
    c. 919/5832
    d. 5/5831
    e. 11/5839

27. De una baraja de 52 naipes se extraen 4. Hallar la probabilidad de que todos sean tréboles.

    a. 41/422
    b. 11/4165
    c. 111/655
    d. 777/5555
    e. 1/ 4165

28. Hallar la probabilidad de que al escoger al azar un dígito entre 1; 2; 3;...;

    a. 1/3
    b. 2/3
    c. 1/5
    d. 3/5
    e. 8/9

29. Hallar la probabilidad de obtener 8 u 11 puntos lanzando, una sola vez, 2 dados al aire.

    a. 5/46
    b. 7/26
    c. 5/36
    d. 7/36
    e. 1/6

30. Se escribe al azar un número de 2 cifras, ¿Cuál es la probabilidad de que dicho número escrito sea múltiplo de 5?

    a. 1/5
    b. 1/13
    c. 3/15
    d. 1/17
    e. 3/17

31. En una urna hay 8 fichas negras y 5 fichas blancas. Se extrae una ficha al azar, ¿Cuál es la probabilidad que sea de color negra?

    a. 7/15
    b. 3/17
    c. 8/13
    d. 9/13
    e. 5/31

32. Se reunieron 10 hombres y 5 mujeres para elegir un presidente dentro de los presentes, ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer sea elegida?

    a. 1/5
    b. 1/3
    c. 3/15
    d. 1/7
    e. 4/13

33. En una urna hay 10 balotas numeradas del 1 al 10. Se extraen de esta urna 2 balotas al azar. ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral de este experimento aleatorio?

    a. 45
    b. 53
    c. 62
    d. 47
    e. 70

34. Si se lanzan 3 monedas, ¿Cuál es la probabilidad de no obtener 2 caras?

a. 1/8
b. 7/8
c. 5/8
d. 3/8
e. ½

35. Siete parejas de casados participan en un concurso, si se escogen 2 personas al azar, halle la probabilidad de que uno sea hombre y la otra mujer.

a. 7/13
b. 5/13
c. 7/12
d. 2/13
e. 13/15

36. Una ficha cuyas caras están marcadas con los números 3 y 4, respectivamente, es lanzada 5 veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un total de 17?

a. 9/17
b. 3/16
c. 5/16
d. 7/16
e. 5/17

37. De un total de 52 cartas, se extraen 2 a la vez. ¿Cuál es la probabilidad de que dichas cartas sean de espadas?

a. 13/52
b. 1/17
c. 1/23
d. 1/52
e. 3/17

38. Juan y cuatro amigos se ubican en una fila, ¿Cuál es la probabilidad de que Juan quede en el centro?

a. 1/5
b. 2/5
c. 3/10
d. 4/7
e. 3/13

39. Se escogen al azar tres plantas de un grupo de quince, de las cuales 5 son defectuosas. Halle la probabilidad de que al menos 3 sean defectuosas,

a. 187/1001
b. 185/1001
c. 177/1001
d. 178/1001
e. 170/1001.

BIBLIOGRAFÍA

Bethune, J. E. D. (2019). The Life of Galileo Galilei, with Illustrations of the
Advancement of Experimental Philosophy: Life of Kepler. Good Press.
Eisenstein, E. (1994). La revolución de la imprenta en la Edad Moderna europea.
Ediciones AKAL.
González, W. J. (2009). Evolucionismo: Darwin y enfoques actuales. Netbiblo.
Holton, G. J., & Brush, S. G. (1996). Introducción a Los Conceptos y Teorías de Las
Ciencias Físicas. Reverte.
Mesa, I. D. P. (2004). Los modernos alquimistas: Epistemología corporativa y gestión
del conocimiento. Universidad Eafit.
Morfín, A. R. M., Noé Ruiz Morfín, Iván Ruiz Morfín, Aarón Ruiz. (2010). Evolución del
saber, desde las creencias hasta la ciencia. Univ. Autónoma de Nayarit.
Nuria, E. M., & Pilar, O. L., María del. (2010). El lenguaje de la ciencia y la tecnología.
Publicacions de la Universitat Jaume I.
Ramírez, A. I. J., Chávez, R. F., Pérez, J. G. A., Villalba, J. A. M., Angulo, A. U., Celani, P., … Rubio, O. L. (2018). Sustentabilidad y tecnología: Herramientas para la gestión segura
y eficiente del hábitat. ITESO.
Sánchez, J. C. (2012). Los métodos de investigación. Ediciones Díaz de Santos.
Zúñiga, Á. R. (2003). Historia Y Filosofía de Las Matemáticas. EUNED.

PUCE
IBARRA

ISBN: 978-9978-375-62-4

9 789978 375624